

Appunti di teoria dei grafi

aggiornati al 7 Agosto 2008

Alberto Amato

Mario Gionfriddo

Giorgio Ragusa

Dipartimento di Matematica e Informatica

Università di Catania

Viale Andrea Doria 6, 95125 Catania, Italia

`gionfriddo@dmf.unict.it, amato@dmf.unict.it, giorgio.ragusa@istruzione.it`

1. Grafi

Generalità

Dato un insieme non vuoto V e una famiglia \mathbf{S} di sottoinsiemi di V tale che, per ogni $s \in \mathbf{S}$, $1 \leq |s| \leq 2$, la coppia $\mathbf{G}=(V, \mathbf{S})$ dicesi un *grafo*. Gli elementi di V diconsì *vertici* o *nodi*, gli elementi di \mathbf{S} diconsì *spigoli* o *archi* del grafo. Se ogni spigolo è una coppia *ordinata* di vertici, il grafo dicesi *diretto* o *orientato* o anche un *digrafo*. Un grafo con n vertici e nessun spigolo si dice nullo e si indica con il simbolo Ω_n . Il grafo senza vertici e senza spigoli si dice grafo vuoto.

Gli elementi di uno spigolo diconsì *estremi* e si suole dire che lo spigolo è *incidente* in tali estremi. Due spigoli aventi almeno un vertice in comune diconsì *incidenti*, due spigoli non aventi vertici in comune diconsì *paralleli*. Due vertici di \mathbf{G} che sono estremi di uno spigolo di \mathbf{G} diconsì *adiacenti*. Ogni spigolo contenente un solo vertice dicesi un *cappio*.

Si noti che in un grafo due vertici adiacenti possono essere estremi di più spigoli. Un grafo privo di cappi e di coppie di spigoli aventi gli stessi estremi dicesi *semplice*. Un grafo semplice in cui due qualunque vertici sono adiacenti dicesi *completo* o *clique*.

Dato un vertice x di un grafo \mathbf{G} , il numero di spigoli incidenti in x dicesi *grado* o *valenza* di x e si denota con il simbolo $d(x)$. Un vertice avente grado zero dicesi *isolato*, un vertice avente grado uno dicesi *pendente*. Ad esempio, nel grafo rappresentato nella figura seguente, si ha $d(x_1)=d(x_2)=d(x_4)=2$, $d(x_3)=3$, $d(x_5)=1$.

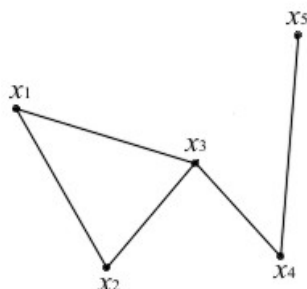


Figura 1

Un grafo i cui vertici hanno tutti il medesimo grado r dicesi *regolare di grado r* .

Dati due insiemi non vuoti e disgiunti A e B , il grafo $\mathbf{G}=(V, \mathbf{S})$, dove $V=A \cup B$ e \mathbf{S} è l'insieme costituito da (tutte) le coppie $\{x, y\}$, con $x \in A$, $y \in B$, dicesi *grafo bipartito (completo)* su A e B .

Ovviamente un grafo completo con n vertici è regolare di grado $n-1$ e ha $\frac{1}{2}n(n-1)$ spigoli; inoltre, un grafo bipartito completo su due insiemi aventi rispettivamente cardinalità m ed n ha mn spigoli ed è regolare se e solo se $m = n$.

Sia $\mathbf{G}=(V, \mathbf{S})$ un grafo.

Dato un sottoinsieme \mathbf{T} di \mathbf{S} , il grafo $\mathbf{H}=(V, \mathbf{T})$ dicesi un *grafo parziale su \mathbf{G}* . Se s è uno spigolo di \mathbf{G} e $\mathbf{T}=\mathbf{S}-\{s\}$, il grafo parziale (V, \mathbf{T}) si suole denotare con il simbolo $\mathbf{G}-\{s\}$.

Dato un sottoinsieme non vuoto W di V e indicato con \mathbf{U} l'insieme costituito da tutti gli spigoli di \mathbf{G} aventi entrambi gli estremi in W , il grafo (W, \mathbf{U}) dicesi *sottografo di \mathbf{G} generato da W* . Nel caso in cui $|W| > 1$, $x \in V$ e $W=V-\{x\}$, il grafo (W, \mathbf{U}) si suole denotare con il simbolo $\mathbf{G}-x$.

Ad esempio, considerato il grafo G rappresentato nella figura precedente e posto $W=\{x_1,x_2,x_3,x_5\}$, il sottografo di G generato da W coincide con $G-x_4$ ed è quello rappresentato nella figura seguente.

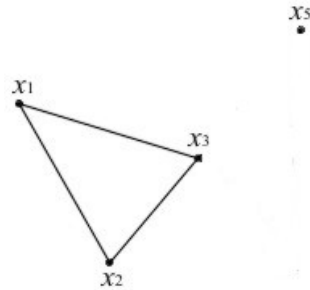


Figura 2

Dato un grafo G , la massima cardinalità dell'insieme dei vertici di un sottografo completo di G dicesi *densità* di G e si denota $\omega(G)$.

Teorema 1 - *La somma dei gradi dei vertici di un grafo privo di cappi è uguale al doppio del numero dei suoi spigoli.*

Dim. Siano $G=(V,S)$ un grafo privo di cappi, $n=|V|$, $m=|S|$, x_1,x_2,\dots,x_n i vertici di G . Se $n=1$, la tesi è chiaramente vera. Sia $n>1$ e si proceda per induzione ammettendo che la tesi sia vera per il sottografo H di G generato da $V-\{x_n\}$. Sia m' il numero degli spigoli di H : se nessun vertice di H è adiacente a x_n , la tesi è conseguita; se no, siano z_1,z_2,\dots,z_p ($p\leq n-1$) i vertici di G adiacenti a x_n rispettivamente con r_1,r_2,\dots,r_p spigoli. Ovviamente, $m=m'+r_1+r_2+\dots+r_p$, cosicchè

$$\sum_{x \in V} d(x) = 2m' + 2r_1 + 2r_2 + \dots + 2r_p = 2m$$

Il teorema è così dimostrato.

Corollario - *In ogni grafo privo di cappi il numero dei vertici di grado dispari è pari.*

Dim. Infatti, se tale numero fosse dispari, anche la somma dei gradi dei vertici del grafo sarebbe un numero dispari.

Corollario - *Ogni grafo privo di cappi, regolare di grado r e avente n vertici ha $\frac{1}{2}nr$ spigoli.*

Dim. Infatti, per il teorema precedente, il numero nr è uguale al doppio del numero degli spigoli. \square

Matrici di adiacenza e di incidenza

Dato un grafo $G=(V,S)$, con $V=\{x_i\}$ numerabile, la matrice $A=(a_{ij})$ tale che $a_{ij}=1$ se e solo se esiste uno spigolo di G avente per estremi x_i e x_j (nell'ordine scritto nel caso di digrafi) e tale che $a_{ij}=0$ se e solo se x_i e x_j non sono adiacenti, dicesi *matrice di adiacenza* relativa a G .

Ovviamente, se G non è orientato, A è simmetrica.

Dato un grafo $G=(V,S)$, con $V=\{x_j\}$. Sia $S=\{s_i\}$. La matrice $B=(b_{ij})$ tale che $b_{ij}=1$ se e solo se lo spigolo s_j è incidente nel vertice x_i , dicesi *matrice di incidenza* relativa a G . \square

Cammini

Dato un grafo $G=(V,S)$ e due vertici x,y di G , una sequenza di vertici x_0,x_1,x_2,\dots,x_k e di spigoli s_1,s_2,\dots,s_k di G tali che:

$$\begin{aligned} s_1 & \text{ ha come estremi } x_0 \text{ e } x_1 \\ s_2 & \text{ ha come estremi } x_1 \text{ e } x_2 \\ & \dots \\ s_k & \text{ ha come estremi } x_{k-1} \text{ e } x_k \end{aligned}$$

dove $x_0=x$, $x_k=y$, dicesi un *cammino* o una *catena* di G congiungente x con y .

In tal caso, si suole dire che y è *raggiungibile* da x e il numero k dicesi *lunghezza* del cammino. Se $x=y$, il cammino dicesi *chiuso*, altrimenti dicesi *aperto*. Se, per ogni coppia di numeri distinti i,j appartenenti a $\{0,1,\dots,k\}$, di cui almeno uno non coincidente con 0 o con k , si ha $x_i \neq x_j$, il cammino dicesi *elementare*. Se, per ogni coppia di numeri distinti i,j appartenenti a $\{1,2,\dots,k\}$, si ha $s_i \neq s_j$, il cammino dicesi *semplice*. Un cammino chiuso elementare dicesi un *ciclo*.

Ovviamente, ogni cammino elementare è semplice ma non viceversa. Ad esempio, nel grafo rappresentato nella figura 1, il cammino costituito dalla sequenza di vertici x_3,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 e dalla sequenza di spigoli s_1,s_2,s_3,s_4,s_5 è semplice ma non elementare.

Quando non è strettamente necessario, nella descrizione di un cammino, è sufficiente indicare solo i vertici. Inoltre, si conviene che, dato un vertice x di un grafo, il singoletto $\{x\}$ è un cammino congiungente x con sé avente lunghezza zero.

Un grafo $G=(V,S)$ tale che per ogni $x,y \in V$, esiste un cammino congiungente x con y , dicesi *connesso*. In tal caso, tra i cammini congiungenti due vertici di G , ne esiste almeno uno avente lunghezza minima h : ciascuno di tali cammini dicesi *linea geodetica* di G e il numero h dicesi *distanza* tra i due vertici considerati.

Dato un grafo $G=(V,S)$, introduciamo in V la seguente relazione:

$$R = \{(x,y) \in V \times V \text{ per cui esiste un cammino di } G \text{ congiungente } x \text{ con } y\}.$$

Si verifica facilmente che tale relazione è di equivalenza. L'insieme V risulta quindi partizionato in classi, ognuna delle quali contiene un vertice del grafo e tutti quelli che sono raggiungibili da esso. I sottografi di G generati da tali classi diconsi *componenti connesse* di G e il loro numero dicesi *numero di connessione* di G . Ovviamente, un grafo è connesso se e solo se ha una sola componente connessa.

Infine, si verifica facilmente che, se s è uno spigolo di un grafo G avente p componenti connesse, il numero di connessione di $G-s$ è p o $p+1$: nel secondo caso, lo spigolo s dicesi un *istmo* o *ponte* di G .

Dimostriamo adesso i seguenti due teoremi:

Teorema 2 (caratterizzazione dei grafi bipartiti) - Sia G un grafo semplice con almeno 2 vertici. Esso è bipartito se e solo se non ha cicli di lunghezza dispari.

Dim. La condizione necessaria è ovvia. Proviamo la condizione sufficiente supponendo, senza ledere la generalità, che il grafo sia connesso. Sia V l'insieme dei suoi vertici e siano $x \in V$, $V_1 = \{y \in V: \text{tutti i cammini elementari congiungenti } x \text{ e } y \text{ hanno lunghezza dispari}\}$, $V_2 = \{y \in V: \text{tutti i cammini elementari congiungenti } x \text{ e } y \text{ hanno lunghezza pari}\}$. Dalla definizione segue che V_1, V_2 sono disgiunti; inoltre $V_1 \cup V_2 = V$, perché, se esistessero due cammini elementari congiungenti x e y , uno dei quali ha lunghezza pari e l'altro dispari, allora esisterebbe un ciclo di lunghezza dispari. Quindi V_1 e V_2 costituiscono una partizione di V e non esiste nessuno spigolo del grafo incidente due vertici appartenenti entrambi a V_1

o entrambi a V_2 . Nel primo caso, infatti, aggiungendo questo spigolo a un cammino elementare congiungente x e y , si otterrebbe un cammino elementare di lunghezza pari congiungente x e z , contro il fatto che $z \in V_1$. Analogamente, nel secondo caso aggiungendo questo spigolo a un cammino elementare congiungente x ed y si otterrebbe un cammino elementare di lunghezza dispari congiungente x e z , contro il fatto che $z \in V_2$. \mathbf{G} è dunque un grafo bipartito su V_1, V_2 .

Teorema 3 (di Cantor-Schroder-Bernstein) - *Dati due insiemi A, B tali che $|A| \leq |B|$ e $|B| \leq |A|$, si ha $|A| = |B|$.*

Dim. Possiamo supporre, senza ledere la generalità, che A, B siano disgiunti. Per ipotesi, esistono due applicazioni iniettive $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow A$. Definiamo il grafo bipartito \mathbf{G} su A e B nel seguente modo: $\{x, y\}$ è uno spigolo di \mathbf{G} se e solo se $y = f(x)$ oppure $g(y) = x$, con $x \in A$, $y \in B$. Dall'ipotesi segue allora che tutti i vertici di \mathbf{G} hanno grado 1 o 2. Sia \mathbf{H} una componente connessa di \mathbf{G} . Essa, in virtù del teorema precedente, non può essere un ciclo di lunghezza dispari e non può essere un cammino aperto finito di lunghezza ≥ 2 , perché, altrimenti, sull'ultimo suo vertice non sarebbe definita né f né g e ciò è impossibile. Quindi \mathbf{H} può essere:

- 1) un ciclo di lunghezza pari con vertici alternativamente in A e in B ;
- 2) un cammino aperto di lunghezza 1, cioè uno spigolo congiungente un vertice in A con uno in B ;
- 3) un cammino aperto di lunghezza infinita con vertici alternativamente in A ed in B .

In tutti e tre i casi, è evidente che i vertici di \mathbf{H} appartenenti ad A possono essere messi in corrispondenza biunivoca con quelli appartenenti a B . Poiché questo risultato è valido per i vertici di ogni componente connessa di \mathbf{G} , esso si può estendere ai vertici di \mathbf{G} . \square

Operatori, omomorfismi, pesi

Siano $\mathbf{G} = (V, \mathbf{S})$ un grafo semplice non completo e x, y vertici distinti non adiacenti di \mathbf{G} . Il grafo semplice ottenuto da \mathbf{G} aggiungendo all'insieme dei suoi spigoli uno spigolo avente per estremi x e y si denota con il simbolo $\mathbf{G} + xy$ e l'operatore introdotto dicesi *operatore di connessione*.

Siano $\mathbf{G} = (V, \mathbf{S})$ un grafo semplice, x, y vertici distinti di \mathbf{G} . Il grafo ottenuto da \mathbf{G} sostituendo i vertici x, y con un unico vertice z e collegando tale vertice con tutti i vertici adiacenti a x e a y si denota con il simbolo \mathbf{G} / xy e l'operatore introdotto dicesi *operatore di contrazione*.

Siano $\mathbf{G} = (V, \mathbf{S})$, $\mathbf{G}' = (V', \mathbf{S}')$ due grafi semplici. Un'applicazione $f: V \rightarrow V'$ tale che, per ogni coppia x, y di vertici adiacenti di \mathbf{G} , $f(x), f(y)$ sono vertici adiacenti di \mathbf{G}' , dicesi un *omomorfismo*. Se f è biettiva e la sua inversa f^{-1} è un omomorfismo, f dicesi un *isomorfismo*.

Due grafi \mathbf{G} , \mathbf{G}' tra cui sussiste un isomorfismo diconsi *isomorfi* e si suole scrivere $\mathbf{G} \cong \mathbf{G}'$.

Ogni grafo isomorfo a un grafo completo avente n vertici si denota con il simbolo \mathbf{K}_n . Ogni grafo isomorfo a un grafo bipartito completo su due insiemi aventi rispettivamente cardinalità m, n si denota con il simbolo $\mathbf{K}_{m, n}$.

Un grafo $\mathbf{G} = (V, \mathbf{S})$ nell'insieme dei cui spigoli è definita un'applicazione f a valori nell'insieme dei numeri reali non negativi, dicesi *pesato*. La mappa f dicesi *peso* o *costo*, e, per ogni spigolo s del grafo, $f(s)$ dicesi *peso* o *costo* di s . La somma dei pesi di tutti gli spigoli di un grafo pesato dicesi *peso* o *costo* del grafo. \square

Intorni, numeri di stabilità

Sia $G=(V,S)$ un grafo semplice avente un insieme finito di vertici.

Dato un vertice x di G , l'insieme costituito dai vertici di G adiacenti a x dicesi *intorno* di x . Dato un sottoinsieme X di V , l'unione di tutti gli intorni degli elementi di X dicesi *intorno* di X .

Ogni sottoinsieme W di V tale che, per ogni $x,y \in W$, x,y non sono adiacenti in G , dicesi *internamente stabile*. Detta I_G la famiglia di tutti gli insiemi internamente stabili di G , il numero

$$\max_{I_G} |W|$$

dicesi *numero di stabilità interna* di G e si denota $\alpha(G)$.

Ogni sottoinsieme W di V tale che, per ogni $y \in V-W$, esiste $x \in W$ tale che x,y sono adiacenti in G , dicesi *esternamente stabile*. Detta E_G la famiglia di tutti gli insiemi esternamente stabili di G , il numero

$$\min_{E_G} |W|$$

dicesi *numero di stabilità esterna* di G e si denota $\beta(G)$.

Due noti problemi di stabilità, a cui si interessò in particolare GAUSS, sono i seguenti: 1) Collocare su una scacchiera il massimo numero di regine in modo che esse non siano mutuamente *in presa*; 2) Collocare su una scacchiera il minimo numero di regine in modo che ogni casa della scacchiera sia *controllata* da almeno una di esse.

La risposta al primo problema è 8. Si può provare che le possibili disposizioni delle regine sono in tutto 92, delle quali le seguenti 12 (fig. 3) sono a due a due distinte a meno di rotazioni e simmetrie (MADACHY 1979, STEINHAUS 1999).

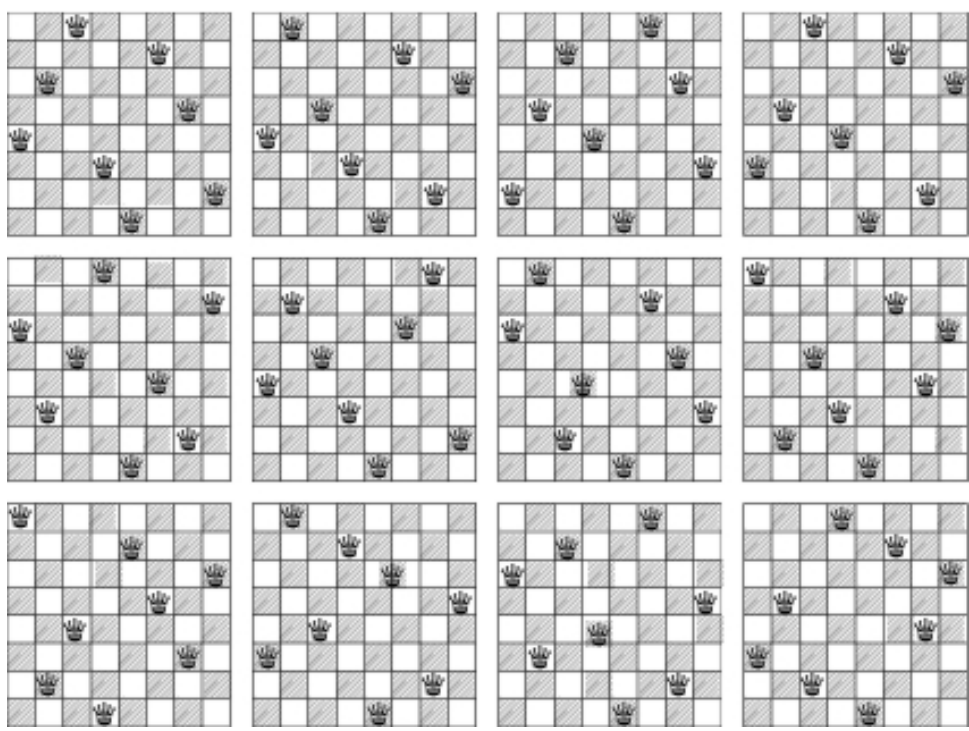


Figura 3

La risposta al secondo problema è 5 e una delle posizioni è riportata nella figura 4. DUDENEY nel 1970 dimostrò che le possibili disposizioni delle regine sono in tutto 4860 e che tali disposizioni possono essere ottenute mediante rotazioni e simmetrie a partire da 638 posizioni fondamentali.

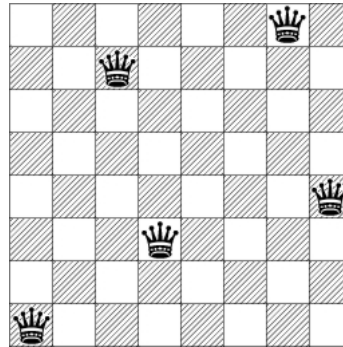


Figura 4

Avvertenza - Nelle pagine seguenti considereremo solo grafi aventi un numero finito di vertici e spigoli. □

2. Alberi

Generalità

Un grafo connesso e privo di cicli (*aciclico*) dicesi un *albero*. I vertici pendenti di un albero si chiamano anche foglie.

In base alla definizione, è chiaro che un albero è un grafo semplice, altrimenti sarebbe dotato di cicli.

Teorema 1 - *In ogni albero, per ogni coppia di suoi vertici distinti, esiste uno e un solo cammino congiungente tali vertici.*

Dim. Infatti, si vede facilmente che, se esistessero due cammini distinti congiungenti due vertici dell'albero, esso avrebbe un ciclo, contro l'ipotesi.

Corollario 1 - *In ogni albero $A=(V,S)$, per ogni $s \in S$, il grafo parziale $A-s$ non è connesso.*

Dim. Siano x,y gli estremi di s . Se $A-s$ fosse connesso, esisterebbe un cammino di $A-s$ congiungente x con y , e quindi A avrebbe due distinti cammini congiungenti x con y .

Il corollario precedente afferma che ogni spigolo di un albero è un istmo.

Corollario 2 - *In ogni albero $A=(V,S)$, si ha $|S|=|V|-1$.*

Dim. Siano $n=|V|$, $m=|S|$. Se $n=1$, la tesi è chiaramente vera. Sia $n>1$ e si supponga che il teorema sia vero per alberi aventi un numero di vertici minore di n . Poiché A è connesso, esso ha uno spigolo s avente per estremi x,y : per il corollario precedente, $A-s$ non è connesso, e quindi $A-s$ è costituito da due componenti connesse A_1 e A_2 , aventi rispettivamente n_1, n_2 vertici e m_1, m_2 spigoli. Ovviamente, $n_1 < n$, $n_2 < n$, e quindi, per l'ipotesi induttiva, $m = m_1 + m_2 + 1 = n_1 - 1 + n_2 - 1 + 1 = n - 1$, da cui l'asserto.

Teorema 2 - *Se un grafo $G=(V,S)$ è connesso e $|S|=|V|-1$, allora esso è aciclico.*

Dim. Sia $n=|V|$ e si supponga, per assurdo, che G abbia un ciclo σ avente k vertici, con $k \leq n$. Poiché G è connesso, gli $n-k$ vertici di G che non sono estremi di alcuno spigolo di σ hanno ciascuno grado non inferiore a uno. Inoltre, esistono almeno $n-k$ spigoli distinti da quelli di σ e gli spigoli di σ sono almeno k . Si ha quindi $|S| \geq k + n - k = n$, il che contraddice l'ipotesi.

Teorema 3 - *Se un grafo $G=(V,S)$ è aciclico e $|S|=|V|-1$, allora esso è connesso.*

Dim. Siano $n=|V|$, $m=|S|$. Si supponga che G abbia k componenti connesse G_1, G_2, \dots, G_k , aventi rispettivamente n_1, n_2, \dots, n_k vertici e m_1, m_2, \dots, m_k spigoli. In virtù del teorema precedente, ciascuna di tali componenti connesse è un albero, e quindi, per ogni $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, si ha $m_i = n_i - 1$. Segue

$$m = \sum_{i=1}^k m_i = \sum_{i=1}^k (n_i - 1) = n - k$$

da cui, per ipotesi, $n - k = n - 1$, e quindi $k = 1$. Dunque G è connesso.

Corollario 3 - *Sia $G=(V,S)$ un grafo.*

1) *Condizione necessaria e sufficiente affinché G sia un albero è che esso sia aciclico e che $|S|=|V|-1$.*

2) Condizione necessaria e sufficiente affinché G sia un albero è che esso sia connesso e che $|S|=|V|-1$.

Da quanto detto segue che, fissato il numero di vertici, un albero è il grafo aciclico con il massimo numero di spigoli ed un grafo connesso con il minimo numero di spigoli.

Teorema 4 - In ogni albero con almeno due vertici esistono almeno due vertici pendenti.

Dim. Siano n il numero dei vertici dell'albero e k il numero di quelli pendenti. Per il corollario 2, l'albero ha $n-1$ spigoli, e quindi, in virtù del teorema 1 del paragrafo precedente,

$$2(n-1) = \sum_{x \in V} d(x) \geq k + 2(n-k)$$

cosicché $k \geq 2$. \square

Un grafo aciclico dicesi **foresta**. Quindi una foresta è un grafo le cui componenti connesse sono alberi.

Teorema 5 - In ogni foresta avente v vertici, s spigoli e p componenti connesse si ha $v-s=p$.

Dim. Siano G_1, G_2, \dots, G_p le componenti connesse della foresta. Per ogni $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, siano v_i il numero dei vertici e s_i il numero degli spigoli di G_i . In virtù del corollario 2 del teorema 1, si ha $v_i - s_i = 1$, e quindi

$$v - s = \sum_1^p v_i - \sum_1^p s_i = \sum_1^p (v_i - s_i) = p$$

Spanning tree

Dato un insieme di nodi, che possono rappresentare città, stazioni ferroviarie, computer, si pone il problema di costruire una rete (*network*) di collegamenti stradali, ferroviari, elettrici tra tali nodi in modo che il costo associato alla rete sia minimo.

È chiaro che la rete in oggetto deve essere un grafo semplice, connesso e aciclico, in quanto tutti i nodi devono essere interconnessi ed eventuali spigoli multipli, cappi e cicli sarebbero inutili sprechi.

Dato un grafo connesso G , un qualsiasi grafo parziale su G che sia un albero dicesi un *albero ricoprente* o un *albero di connessione* o uno *spanning tree* (ST) di G .

Ne segue che uno ST è un albero che contiene tutti i vertici del grafo, ma contiene solo un sottoinsieme degli spigoli necessario affinché due vertici arbitrari siano congiunti da uno e un solo cammino.

Nel caso in cui il grafo sia pesato, ogni ST avente costo minimo dicesi un *albero ricoprente minimo* o un *minimum spanning tree* (MST) di G .

Se il grafo non è connesso, si definisce una *foresta ricoprente minima* come unione di alberi ricoprenti minimi individuati sulle singole componenti connesse del grafo. \square

Algoritmo di Kruskal

Dato un grafo semplice completo pesato G , al fine di determinare un suo MST, si può applicare il seguente algoritmo, dovuto a KRUSKAL:

- 1) Si ordinino gli spigoli del grafo in modo tale che il costo di ciascuno di essi sia non maggiore del successivo ottenendo un vettore $\mathbf{s}=[s_1, s_2, \dots, s_p]$;
- 2) Si cancellino gli eventuali spigoli che formino un ciclo con alcuni spigoli precedenti.

È chiaro che il grafo ottenuto applicando il precedente algoritmo è un albero ricoprente il grafo in oggetto, e quindi ha $n-1$ spigoli. Per provare che esso ha costo minimo, bisogna dimostrare il

Teorema 6 - *Dato un grafo completo G avente n vertici, un albero T ricoprente G avente costo minimo e avente $k-1$ spigoli in comune con l'albero A ottenuto come output dell'algoritmo di Kruskal ($0 < k < n$), esiste un albero ricoprente G di costo minimo avente k spigoli in comune con A .*

Dim. Sia s_k il primo spigolo di A (relativamente agli indici) che non sia spigolo di T . Allora, nel grafo $T + \{s_k\}$ esiste un ciclo C contenente s_k . Poiché A è aciclico, esiste uno spigolo s' di C che non è spigolo di A . Consideriamo il grafo $T' = T + \{s_k\} - \{s'\}$. Il grafo $T - s'$ è sconnesso, e, dato che s' appartiene a un ciclo del grafo $T + \{s_k\}$, T' è connesso e ha $n-1$ spigoli, e quindi è un albero ricoprente. Il suo costo è $c(T') = c(T) + c(s_k) - c(s')$, cosicché $c(T') \leq c(T)$, poiché $c(s_k) \leq c(s')$. Quest'ultima disuguaglianza segue dal fatto che s_k ha il costo minimo tra gli spigoli di $K_n - \{s_1, s_2, \dots, s_{k-1}\}$ che non formano cicli con $\{s_1, s_2, \dots, s_{k-1}\}$ e dal fatto che s' è proprio uno di questi spigoli. Dalla disuguaglianza $c(T') \leq c(T)$ e dal fatto che T ha per ipotesi costo minimo, segue che anche T' ha costo minimo ed è quindi un albero ricoprente di costo minimo avente k spigoli in comune con A . \square

Dal teorema appena dimostrato segue facilmente che l'albero A è ricoprente minimo. Si noti che l'algoritmo di Kruskal consente anche di trovare uno ST di un grafo non pesato, attribuendo peso 1 a ciascuno dei suoi spigoli.

3. Grafi euleriani

Generalità

Sia $G=(V,S)$ un grafo. Un cammino di G che percorre tutti gli spigoli di G una e una sola volta dicesi *euleriano*. Se G ha almeno un cammino euleriano, G dicesi *semieuleriano*; se G ha almeno un cammino chiuso euleriano, G dicesi *euleriano*. Ovviamente ogni grafo euleriano è semieuleriano.

Nella figura seguente sono rappresentati un grafo euleriano, un grafo semieuleriano ma non euleriano e un grafo non semieuleriano.

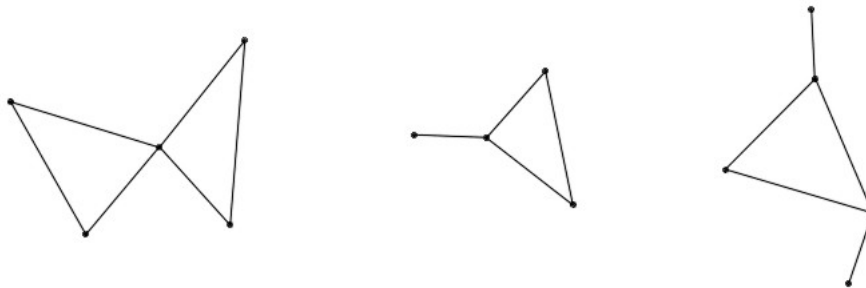


Figura 5

Teorema 1 - Dato un grafo connesso $G=(V,S)$, i seguenti enunciati sono equivalenti:

- i) G è euleriano;
- ii) Ogni vertice di G ha grado pari;
- iii) Esiste una partizione di S in cicli.

Dim. Sarà fatta in tre passi: $i \rightarrow ii$; $ii \rightarrow iii$; $iii \rightarrow i$.

$i \rightarrow ii$) Per ipotesi, G ha almeno un cammino chiuso euleriano, e, poiché G è connesso, tale cammino chiuso attraversa tutti i vertici di G . Dato che il cammino chiuso percorre tutti gli spigoli di G una e una sola volta, il grado di ogni vertice è un numero pari.

$ii \rightarrow iii$) Per ipotesi, ogni vertice di G ha grado pari. Se G fosse aciclico, esso sarebbe, per definizione, un albero, e quindi, per il teorema 4 del paragrafo precedente, G avrebbe almeno un vertice di grado uno, il che è escluso dell'ipotesi. Quindi G ha almeno un ciclo σ_1 . Se G coincide con σ_1 , la tesi è provata. Se no, sia G_1 il grafo ottenuto da G sopprimendo tutti gli spigoli di σ_1 e tutti i vertici isolati. Ovviamente, G_1 è connesso e tutti i suoi vertici hanno grado pari, cosicché, iterando il ragionamento fatto su G , esiste in G_1 almeno un ciclo σ_2 . Così procedendo, si trova che l'insieme S è partizionato in cicli.

$iii \rightarrow i$) Sia σ_1 uno dei k cicli della partizione. Se $k=1$, la tesi è provata. Se no, considerato che G è connesso, esiste un altro ciclo σ_2 della partizione avente almeno un vertice x in comune con σ_1 . Il cammino chiuso che da x percorre in sequenza tutti gli spigoli di σ_1 e σ_2 attraversa tutti i loro spigoli una e una sola volta. Se $k=2$, la tesi è provata. Se no, iterando il ragionamento fatto prima, esiste un ciclo σ_3 della partizione distinto dai precedenti e avente almeno un vertice y in comune con σ_1 o σ_2 , ad esempio con σ_1 . Il cammino chiuso che da x percorre in sequenza tutti gli spigoli di σ_1 fino ad incontrare y , tutti gli spigoli di σ_3 , tutti gli eventuali rimanenti spigoli di σ_1 e tutti gli spigoli di σ_2 contiene gli spigoli di $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ una e una sola volta. Così procedendo, si perviene a un cammino chiuso euleriano di G .

Teorema 2 - Condizione necessaria e sufficiente affinché un grafo connesso $G=(V,S)$, sia semieuleriano è che esistano almeno $|V|-2$ vertici di G aventi grado pari.

Dim. Condizione necessaria. Per ipotesi, esiste un cammino euleriano π congiungente due vertici x, y di G . Se $x=y$, G è euleriano, e quindi, in virtù del teorema precedente, tutti i suoi vertici hanno grado pari. Se $x \neq y$, si consideri il grafo G' ottenuto da G aggiungendo ai suoi spigoli uno spigolo avente per estremi x e y . Il cammino costituito da π e da tale spigolo costituisce un cammino chiuso euleriano di G' , e quindi, per il teorema precedente, tutti i vertici di G' hanno grado pari. Il grado dei vertici di G' distinti da x e y è uguale ovviamente al grado degli stessi vertici di G , e quindi esistono almeno $|V|-2$ vertici di G aventi grado pari.

Condizione sufficiente. Per un corollario del teorema 1 del §1, il numero dei vertici di G aventi grado pari non può essere $|V|-1$, e quindi i vertici di G aventi grado pari sono $|V|$ o $|V|-2$. Nel primo caso, in virtù del teorema 1, G è euleriano, e quindi semieuleriano. Nel secondo caso, detti x, y i vertici di G aventi grado dispari e considerato il grafo G' ottenuto da G aggiungendo ai suoi spigoli uno spigolo avente per estremi x e y , tutti i vertici di G' hanno grado pari, cosicché, per il teorema precedente, G' è euleriano. Esiste quindi un cammino chiuso euleriano di G' , e dunque un cammino euleriano di G . \square

Algoritmo per la costruzione di un cammino chiuso euleriano

Sia G un grafo euleriano connesso avente m spigoli. Per costruire un cammino chiuso euleriano di G si può utilizzare il seguente algoritmo:

```

i ← 1;
xi ← arbitrario vertice di G;
Gi ← G;
while (i ≤ m) do
    si ← l'unico spigolo incidente in xi, o, se ne esiste più di uno, uno spigolo incidente in xi tra quelli
    che non sono un istmo per Gi;
    i ← i+1;
    xi ← estremo di si-1 distinto da xi-1;
    Gi ← grafo ottenuto da Gi-1 sopprimendo lo spigolo si-1 e tutti gli eventuali vertici isolati;
end while;
output → Cammino chiuso euleriano {x1, x2, ..., xm, x1}, {s1, s2, ..., sm}.
  
```

Teorema 3 - L'algoritmo su esposto restituisce un cammino chiuso euleriano di G . \square

Esercizio

Si determini, applicando l'algoritmo precedente, un cammino chiuso euleriano del grafo rappresentato in figura 6.

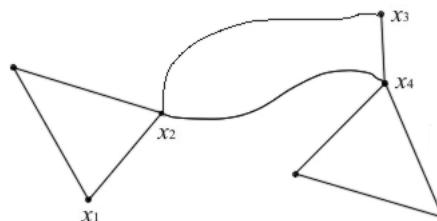


Figura 6

Nota storica

Si ritiene che lo studio dei cammini euleriani abbia introdotto storicamente la teoria dei grafi con il celebre problema dei 7 ponti di Königsberg, città natale di KANT e di HILBERT, nella Prussia orientale. La città si trova alla confluenza di due fiumi, comprende un isolotto ed è divisa in quattro zone connesse tra di loro da sette ponti come indicato nella figura seguente. I cittadini di Königsberg si chiesero se fosse possibile determinare il percorso di una passeggiata che, partendo da un dato punto, ad esempio dalla zona A, consentisse di tornare al punto di partenza dopo aver attraversato tutti i ponti una e una sola volta.

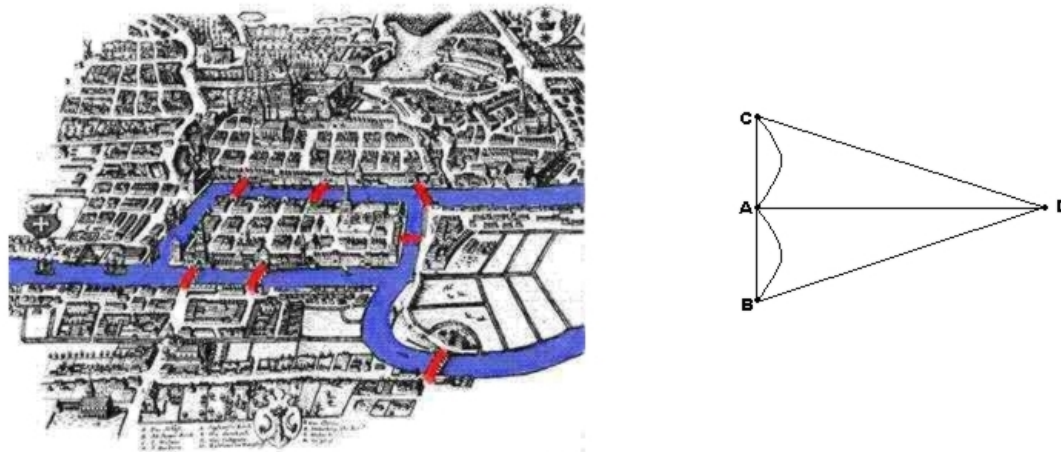


Figura 7

EULERO associò alla situazione reale il multigrafo rappresentato nella figura 5 e nel lavoro *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* del 1736, in cui compare per la prima volta il termine *grafo*, dimostrò che il problema non ha soluzioni. Infatti, il grafo ha vertici di grado dispari, e quindi, come abbiamo visto, non ammette cammini chiusi euleriani. È interessante osservare che nel 1875, molti anni dopo la morte di Eulero, a Königsberg fu costruito un ottavo ponte, che, a norma del teorema 2, rende il grafo semieuleriano.

La teoria dei grafi euleriani trova oggi numerose applicazioni in problemi connessi al trasporto di merci e all'ispezione e manutenzione di sistemi distribuiti di reti elettriche, telefoniche e postali. In particolare, essa è considerata il fondamento dell'attuale concezione delle reti. Eulero aveva infatti osservato che l'esistenza o meno di un percorso con determinate caratteristiche è una proprietà intrinseca del grafo e non dipende dalla nostra capacità di verificarla. In altre parole, nella loro architettura, i grafi e le reti nascondono proprietà che possono limitare o favorire la loro destinazione applicativa. □

4. Grafi hamiltoniani

Generalità

Sia $G=(V,S)$ un grafo. Un cammino di G che attraversa tutti i vertici di G una e una sola volta dicesi *hamiltoniano*. Se G ha almeno un cammino hamiltoniano, G dicesi *semihamiltoniano*; se G ha almeno un ciclo hamiltoniano, G dicesi *hamiltoniano*.

Ovviamente ogni grafo hamiltoniano è semihamiltoniano.

Nella figura seguente sono rappresentati un grafo hamiltoniano, un grafo semihamiltoniano ma non hamiltoniano, un grafo non semihamiltoniano.

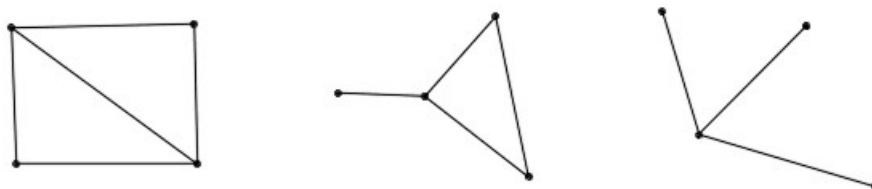


Figura 8

Osservazioni

1) È chiaro che, nella ricerca di eventuali cammini o cicli hamiltoniani di un dato grafo, non ha alcuna rilevanza il fatto che esso sia semplice o no. Possiamo quindi supporre, senza ledere in alcun modo la generalità di quanto esporremo, di studiare grafi semplici.

2) Tutti i cicli Z_n e tutti i grafi completi K_n , con $n \geq 3$, sono hamiltoniani. Invece non tutti i grafi $K_{m,n}$ sono hamiltoniani: ad esempio, $K_{2,2}$ e $K_{3,3}$ sono hamiltoniani, mentre $K_{1,3}$ e $K_{2,3}$ non lo sono.

3) I concetti di grafi euleriani e hamiltoniani sono indipendenti. Infatti, ad esempio, il primo dei grafi rappresentati nella figura 3 è euleriano ma non semihamiltoniano, K_4 è hamiltoniano ma non semieuleriano.

4) I teoremi del paragrafo precedente costituiscono importanti caratterizzazioni di grafi euleriani e semieuleriani, ed è ragionevole attendersi che esistano criteri analoghi per i grafi hamiltoniani. Invece, la ricerca di simili caratterizzazioni per i grafi hamiltoniani presenta, a dispetto della apparente somiglianza, difficoltà profondamente diverse. Infatti, per decidere se un grafo è euleriano, è sufficiente esaminare il grado dei suoi vertici, mentre la caratterizzazione dei grafi hamiltoniani costituisce uno dei problemi aperti più rilevanti della matematica discreta.

Teorema 1 - Dato un grafo semplice non hamiltoniano G , è possibile aggiungere ad esso un certo numero di spigoli in modo che il grafo che si ottiene sia semplice e hamiltoniano.

Dim. Siano x,y due vertici non adiacenti del grafo, s uno spigolo avente estremi x,y . Se $G+s$ non è completo e non è hamiltoniano si iteri il procedimento sul grafo $G+s$ scegliendo due suoi vertici non adiacenti. Alla fine, si perviene a un grafo semplice hamiltoniano o a un grafo completo.

Teorema 2 (Bondy-Chvátal, 1976) - Siano G un grafo semplice con $n \geq 3$, x, y vertici non adiacenti di G tali che $d(x) + d(y) \geq n$. Condizione necessaria e sufficiente affinché G sia hamiltoniano è che $G + xy$ sia hamiltoniano.

Dim. La condizione necessaria è immediata. Condizione sufficiente. Si supponga, per assurdo, che G non abbia un ciclo hamiltoniano. Il grafo $G + xy$ ha un ciclo hamiltoniano che ovviamente comprende uno spigolo s avente per estremi x e y e che è quindi individuato da una sequenza di vertici del tipo $\{x, y, a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, x\}$. Se $n=3$, si ha chiaramente $d(x) + d(y) = 2$, il che è escluso dall'ipotesi. Sia quindi $n > 3$ e si osservi che, per ogni $i \in \{2, \dots, n-2\}$ per cui y e a_i sono adiacenti, x e a_{i-1} non possono essere adiacenti, perché, in caso contrario, il cammino individuato dalla sequenza di vertici $\{y, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{n-2}, x, a_{i-1}, \dots, a_1, y\}$ sarebbe un ciclo hamiltoniano di G . Detto quindi p il numero dei vertici dell'insieme $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-2}\}$ che sono adiacenti a y , tra essi ne esistono almeno $p-1$ che non sono adiacenti a x , cosicché $d(x) + d(y) \leq n-2-(p-1)+p = n-1$, il che è contro l'ipotesi.

Si osservi che il teorema precedente costituisce solo una *caratterizzazione tautologica* dei grafi hamiltoniani. \square

Chiusura di un grafo

Sia G un grafo semplice con $n \geq 2$ vertici. Si consideri il seguente algoritmo:

```

while ( $G$  ha due vertici non adiacenti  $x, y$  tali che  $d(x) + d(y) \geq n$ ) do
  Si scelgano due arbitrari vertici  $x, y$  di  $G$  tali che  $d(x) + d(y) \geq n$ ;
   $G \leftarrow G + xy$ ;
end while;
output  $\rightarrow$  Grafo  $G$ .

```

Si verifica facilmente che l'algoritmo restituisce un grafo semplice che è indipendente dalla scelta della coppia di vertici operata all'interno del ciclo *while*: tale grafo dicesi *chiusura* di G e si denota $c(G)$.

Esercizio

Si determini, applicando l'algoritmo precedente, la chiusura dei grafi rappresentati qui sotto:

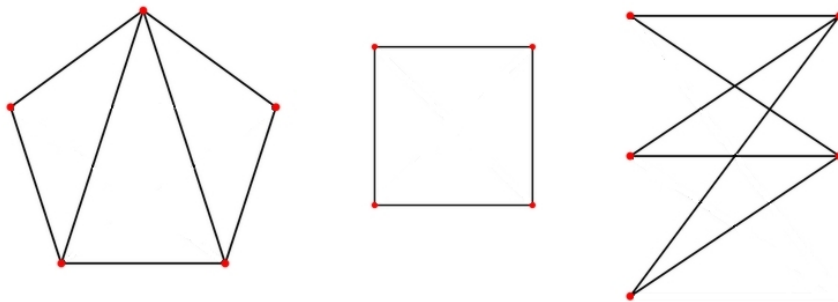


Figura 9

Teorema 3 (Bondy-Chvátal, 1976) - Condizione necessaria e sufficiente affinché un grafo semplice G avente $n \geq 3$ vertici sia hamiltoniano è che il grafo $c(G)$ sia hamiltoniano.

Corollario - Un grafo semplice G con $n \geq 3$ vertici e avente chiusura completa è hamiltoniano.

Teorema 4 (Ore, 1960) - Un grafo semplice G con $n \geq 3$ vertici e tale che, per ogni coppia x, y di suoi vertici non adiacenti, $d(x) + d(y) \geq n$, è hamiltoniano.

Dim. Infatti, come si verifica facilmente, $c(G)$ è completo, e quindi, per il corollario precedente, G è hamiltoniano.

Osservazioni

1) I due enunciati precedenti non costituiscono caratterizzazioni dei grafi hamiltoniani. Infatti, ad esempio, Z_5 è hamiltoniano, ma la somma dei gradi di due suoi qualsiasi vertici è 4; inoltre, $c(Z_5) \cong Z_5$ non è un grafo completo.

2) Il teorema 3 è una condizione sufficiente che richiede ipotesi meno restrittive del teorema di Ore. Infatti, ad esempio, il primo dei grafi riportati nella figura 9 non verifica le ipotesi del teorema di Ore, ma ha chiusura completa, e quindi, a norma del teorema 2, è hamiltoniano.

Teorema 5 (Dirac, 1952) - Un grafo semplice G con $n \geq 3$ vertici e tale che ogni suo vertice ha grado non inferiore a $\frac{n}{2}$, è hamiltoniano.

Dim. Infatti, per ogni coppia di vertici x, y di G , si ha $d(x) + d(y) \geq n$, e quindi, per il teorema di Ore, si ha la tesi. \square

Nota storica

Lo studio dei cammini hamiltoniani trasse origine dal cosiddetto *problema del commesso viaggiatore*, introdotto nel 1859 dal matematico irlandese WILLIAM HAMILTON, il quale costruì uno strano rompicapo utilizzando un dodecaedro regolare di legno.

Si trattava di un poliedro platonico con dodici facce pentagonali regolari e venti vertici, ciascuno dei quali era contrassegnato dal nome di una città. Il problema consisteva nel trovare un itinerario lungo gli spigoli che toccasse ciascuna città una e una sola volta, eventualmente fissando alcuni vertici da visitare per primi allo scopo di rendere il gioco più difficile. Per motivi di praticità, HAMILTON produsse anche una versione più maneggevole del rompicapo, noto come *icosian game*, in cui il poliedro fu sostituito da un grafo planare isomorfo al grafo costituito dagli spigoli del dodecaedro.



Figura 10

A differenza del problema di Eulero, quello di Hamilton ha soluzione, come si vede nella figura 11.

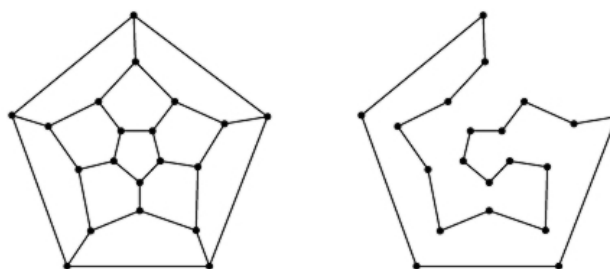


Figura 11

Un altro problema relativo ai grafi hamiltoniani, molto meno conosciuto ma altrettanto interessante, è quello relativo al salto del cavallo su una scacchiera, a cui si erano interessati Eulero sin dal 1759 e poi Legendre, Vandermonde ed altri.

È noto dalle regole del gioco degli scacchi che il cavallo si muove passando da una casa bianca ad una nera o viceversa come mostrato nella figura seguente.

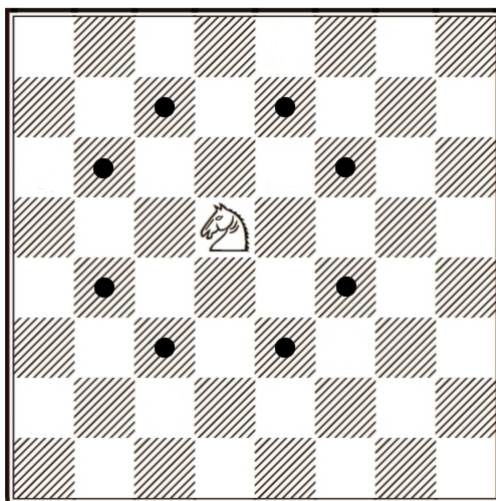


Figura 12

I problemi che si pongono su una scacchiera quadrata generica $n \times n$ sono i seguenti: 1) È possibile muovere un cavallo occupando tutte le case una e una sola volta? 2) Si può percorrere un cammino chiuso che permetta al cavallo di visitare tutte le case una e una sola volta e di ritornare alla casa di partenza?

La traduzione dei problemi in termini di teoria dei grafi è quella di chiedersi se nel grafo G_n costituito dalle case adiacenti a un salto di cavallo esiste o meno un cammino o un ciclo hamiltoniano.

Si può provare che il grafo G_n è semihamiltoniano se e solo se $n \geq 5$ ed è hamiltoniano se e solo se n è un numero pari non inferiore a 6. Forse potrebbe sembrare provocatorio chiedere di determinare il numero dei possibili cicli hamiltoniani che può descrivere un cavallo su una scacchiera $n \times n$, con n pari e non inferiore a 6. Se $n=6$, questo numero è 9862, mentre, se $n=8$, come hanno provato KYEK, PARBERRY e WEGENER, esso è compreso tra 122802512 e 3.019×10^{22} . In generale, sembra impossibile poter determinare il numero richiesto in funzione di n .

Nelle figure seguenti sono illustrati cammini e cicli hamiltoniani del grafo G_n nei casi $n=5$, $n=6$, $n=12$.

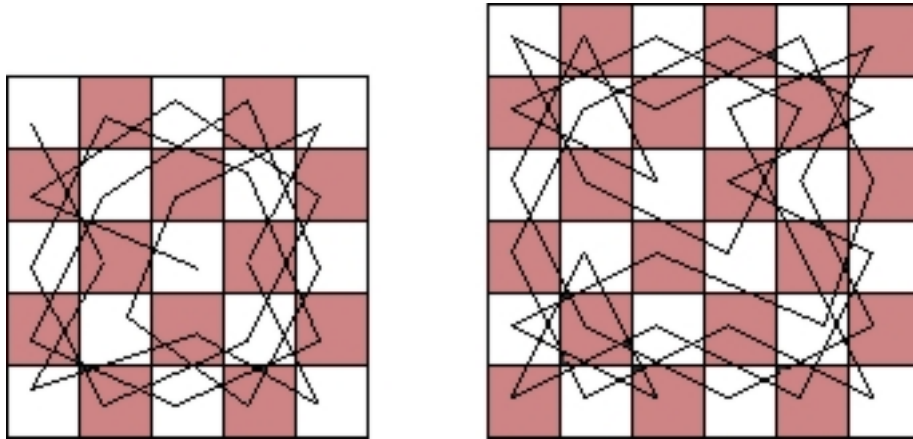


Figura 13

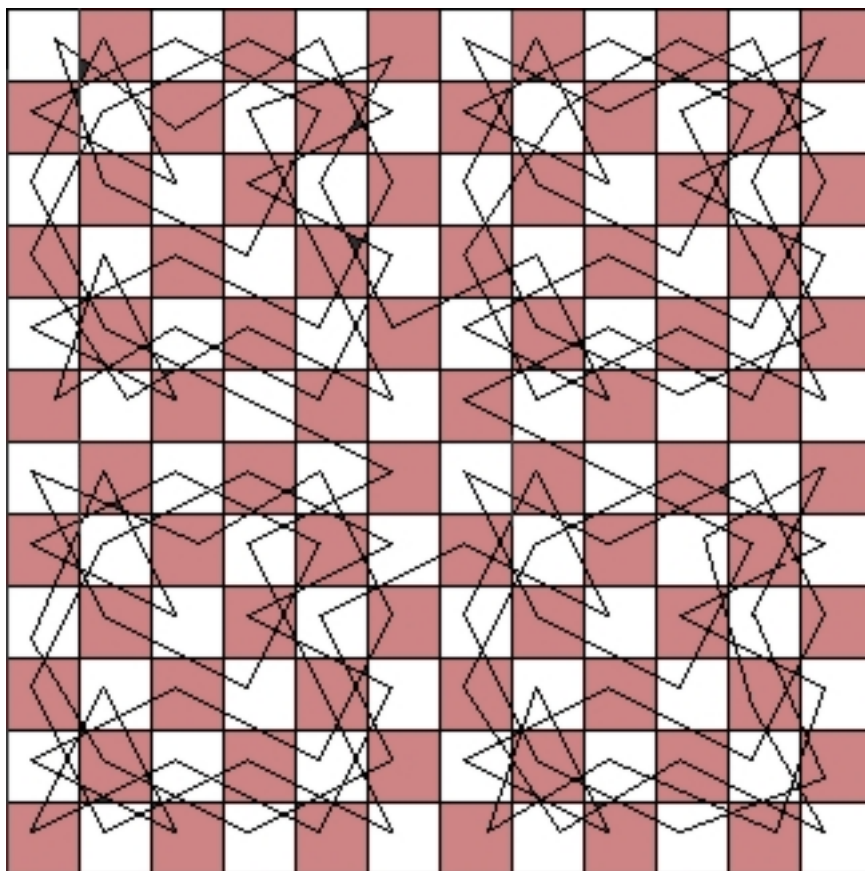


Figura 14

Il problema del commesso viaggiatore

Il problema del commesso viaggiatore, noto come *Traveling Salesman Problem* o TSP, rappresenta uno dei casi di studio più rilevanti dell'informatica teorica e della teoria della complessità. Il nome nasce dalla sua tipica formulazione: data una rete di città, connesse da strade, si tratta di determinare il percorso di minima distanza che un commesso viaggiatore deve seguire per visitare tutte le città una e una sola volta. Il problema può essere ovviamente riformulato nei seguenti termini: dato un grafo completo pesato, determinare il ciclo hamiltoniano avente peso minimo.

L'importanza pratica del problema va molto al di là delle ovvie applicazioni nella logistica e nei trasporti. Un esempio classico è la costruzione di circuiti stampati, in relazione alla pianificazione del percorso del trapano per creare i fori di una piastra. Nelle applicazioni di foratura o di rifinitura automatica eseguite da robot, i vertici del grafo che modella il problema rappresentano i pezzi da rifinire o i fori da praticare, che possono anche essere di diametro variabile, e il costo degli spigoli rappresenta i tempi morti che il robot impiega per cambiare di volta in volta la punta con cui lavora.

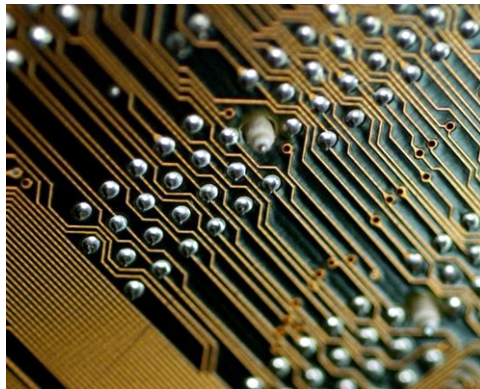


Figura 15

Non esistono algoritmi efficienti per la risoluzione del TSP, e l'unico metodo di risoluzione è rappresentato dall'enumerazione totale, cioè l'elaborazione di tutti i possibili cammini sul grafo per la successiva scelta di quello migliore. Tuttavia, la complessità dell'operazione la rende impraticabile per grafi di dimensioni comuni nei problemi reali: ad esempio, in un grafo con n nodi, bisognerà calcolare, nel caso peggiore in cui ogni nodo è connesso con tutti gli altri, $n!$ possibili cammini.

Nel marzo 2005 il TSP riguardante la visita di tutti i 33.810 punti in una scheda di circuito fu risolto usando un algoritmo denominato *Concorde*. Fu provato che la soluzione era ottimale, ma l'esecuzione richiese approssimativamente 15,7 anni CPU. Finora sono stati progettati vari algoritmi approssimati che hanno un'alta probabilità di produrre soluzioni accettabili in tempi ragionevoli, soprattutto nell'ambito del cosiddetto TSP *euclideo* o *planare*, in cui si suppone che i pesi degli spigoli sono distanze euclidee soddisfacenti la nota disuguaglianza triangolare, secondo cui, per ogni $x, y, z \in V$, $c(x, y) \leq c(x, z) + c(z, y)$.

Sotto queste ipotesi, un algoritmo di approssimazione che individua un percorso avente peso non superiore al doppio del peso ottimale è il seguente:

- 1) Si costruisca l'albero ricoprente minimo A ;
- 2) Si duplichino tutti i suoi spigoli, ottenendo un multigrafo euleriano E ;
- 3) Si determini in E un cammino chiuso mediante l'algoritmo descritto nel §3;
- 4) Si trasformi il cammino chiuso in un ciclo hamiltoniano H nel seguente modo: percorrendo il cammino chiuso euleriano, ogni volta che si sta per toccare un vertice già visitato x_i , si sostituisca il cammino $[x_{i-1}, x_i, \dots, x_{i+h}]$ con lo spigolo $\{x_{i-1}, x_{i+h}\}$, dove x_{i+h} è il primo vertice non ancora visitato o, in assenza di quest'ultimo, il vertice di partenza del cammino chiuso.

Sussiste il seguente

Teorema 5 - *Il costo del ciclo ottenuto con il precedente algoritmo è al massimo doppio di quello del ciclo hamiltoniano ottimale avente peso minimo.*

Dim. Indichiamo con M il ciclo hamiltoniano di peso minimo, con \mathbf{A} l'albero ricoprente di peso minimo, con $c(M)$ e $c(\mathbf{A})$ i rispettivi costi. Il ciclo M , essendo hamiltoniano, è costituito da n spigoli. Togliendo un qualsiasi spigolo da M si ottiene dunque un albero ricoprente di costo minore o uguale a quello di M . Quindi si ha $c(\mathbf{A}) \leq c(M)$. Dato l'albero \mathbf{A} , raddoppiamo tutti i suoi spigoli, ottenendo così un multigrafo \mathbf{E} . Tale multigrafo è euleriano, in quanto tutti i vertici hanno grado pari. Il costo di un cammino chiuso euleriano su tale multigrafo è uguale alla somma dei costi di tutti gli spigoli, ossia $2c(\mathbf{A})$. Il ciclo hamiltoniano H ottenuto al passo 4 dell'algoritmo segue gli spigoli del cammino chiuso euleriano, ma ne salta alcuni, e quindi, per la disuguaglianza triangolare, $c(H)$, non è superiore al costo del cammino chiuso euleriano. Segue $c(H) \leq 2c(\mathbf{A})$, e dunque, ricordando che $c(\mathbf{A}) \leq c(M)$, si ha $c(H) \leq 2c(M)$.

Nel 1975 CHRISTOFIDES migliorò questo algoritmo sostituendo il passo 2 con il seguente, che utilizza il concetto di 1-fattore (vedi la sezione successiva):

2) Si determini l'1-fattore di peso minimo sul sottografo di \mathbf{K}_n indotto da tutti i vertici che hanno grado dispari in \mathbf{A} e si unisca tale 1-fattore ad \mathbf{A} ottenendo il grafo euleriano E ;

Si può dimostrare che il ciclo hamiltoniano ottenuto con questa sostituzione ha un costo che è al massimo 1,5 volte quello ottimale. \square

5. Accoppiamenti e fattori

Generalità

Sia $G=(V,S)$ un grafo semplice. Due spigoli di G che non hanno estremi in comune diconsi *paralleli*. Ogni sottoinsieme non vuoto di S costituito da spigoli a due a due paralleli dicesi un *accoppiamento* o *matching* di G . Ogni accoppiamento T di G tale che, per ogni $x \in V$, esiste uno spigolo di T incidente in x , dicesi un *1-fattore* o un *perfect matching* di G .

Se esiste una partizione di S costituita da 1-fattori, G dicesi *1-fattorizzabile* e tale partizione dicesi una *1-fattorizzazione* di G .

Un 1-fattore induce quindi un grafo parziale di G regolare di ordine 1. In generale, un k -fattore è un sottografo parziale regolare di ordine k . Se esiste una partizione di S costituita da k -fattori, G dicesi *k -fattorizzabile* e tale partizione dicesi una *k -fattorizzazione* di G .

A volte si usano i termini *fattore*, *fattorizzabile*, *fattorizzazione* in luogo rispettivamente di *1-fattore*, *1-fattorizzabile*, *1-fattorizzazione*.

Esempi - 1) Il grafo completo K_4 sull'insieme $V=\{1, 2, 3, 4\}$ è fattorizzabile e una sua fattorizzazione è la seguente:

F_1	F_2	F_3
1, 2	1, 3	1, 4
3, 4	2, 4	2, 3

2) Il grafo completo K_6 sull'insieme $V=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ è fattorizzabile e una sua fattorizzazione è la seguente:

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
3, 4	2, 5	2, 6	2, 4	2, 3
5, 6	4, 6	3, 5	3, 6	4, 5

3) Il grafo bipartito completo $K_{3,3}$ su $V_1=\{1, 2, 3\}$, $V_2=\{1', 2', 3'\}$ è fattorizzabile e una sua fattorizzazione è la seguente:

F_1	F_2	F_3
1, 1'	1, 2'	1, 3'
2, 2'	2, 3'	2, 1'
3, 3'	3, 1'	3, 2'

Sussistono i seguenti tre teoremi, di cui omettiamo le dimostrazioni.

Teorema 1 - *Condizione necessaria e sufficiente affinché un grafo K_n completo su un insieme di cardinalità n sia fattorizzabile è che n sia pari. In tal caso, posto $n=2p$, una fattorizzazione di K_n si ottiene considerando, per ogni $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, l'insieme F_i costituito dallo spigolo $\{i, n\}$ e dagli spigoli aventi per estremi i i vertici $i+j, i-j \pmod{n-1}$ al variare di j in $\{1, 2, \dots, p-1\}$. Inoltre, ogni fattorizzazione di K_n ha $n-1$ fattori.*

Esempio - Una fattorizzazione del grafo completo K_8 sull'insieme $V=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ si può costruire in base all'enunciato del precedente teorema:

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7
1, 8	2, 8	3, 8	4, 8	5, 8	6, 8	7, 8
2, 7	3, 1	4, 2	5, 3	6, 4	7, 5	1, 6
3, 6	4, 7	5, 1	6, 2	7, 3	1, 4	2, 5
4, 5	5, 6	6, 7	7, 1	1, 2	2, 3	3, 4

Ogni fattorizzazione di K_n con n pari dicesi un *torneo*; ogni fattore dicesi un *turno*.

Teorema 2 - Ogni grafo $K_{n,n}$ bipartito completo su due insiemi disgiunti $V_1=\{1,2,\dots,n\}$, $V_2=\{1',2',\dots,n'\}$ è fattorizzabile. Una fattorizzazione di $K_{n,n}$ si ottiene considerando, in corrispondenza di ogni $i \in \{1,2,\dots,n\}$, l'insieme F_i costituito dagli spigoli aventi per estremi i vertici $j, (i + j)' \pmod n$ al variare di j in $\{1,2,\dots,n\}$. Inoltre, ogni fattorizzazione di $K_{n,n}$ ha n fattori.

Esempio - Una fattorizzazione del grafo bipartito completo $K_{4,4}$ su $V_1=\{1,2,3,4\}$, $V_2=\{1',2',3',4'\}$ si può costruire in base all'enunciato del precedente teorema:

F_1	F_2	F_3	F_4
1, 2'	1, 3'	1, 4'	1, 1'
2, 3'	2, 4'	2, 1'	2, 2'
3, 4'	3, 1'	3, 2'	3, 3'
4, 1'	4, 2'	4, 3'	4, 4'

Ogni fattorizzazione di $K_{n,n}$ dicesi un *torneo a squadre*.

Teorema 3 - Sia K_n un grafo completo su un insieme V di cardinalità n , con $n=4p$. Data una partizione di V costituita da due sottoinsiemi V_1, V_2 avente ciascuno cardinalità $2p$, esiste una fattorizzazione di K_n in modo che dei $4p-1$ fattori di tale fattorizzazione, $2p$ siano fattori di una fattorizzazione del grafo bipartito completo su V_1 e V_2 e ciascuno dei rimanenti $2p-1$ fattori sia unione di un fattore di una fattorizzazione del grafo completo su V_1 e di un fattore di una fattorizzazione del grafo completo su V_2 .

Esempio - Un'altra fattorizzazione del grafo completo K_8 sull'insieme $V=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ si può costruire in base all'enunciato del precedente teorema:

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7
1, 2	1, 3	1, 4	1, 6	1, 7	1, 8	1, 5
3, 4	2, 4	2, 3	2, 7	2, 8	2, 5	2, 6
5, 6	5, 7	5, 8	3, 8	3, 5	3, 6	3, 7
7, 8	6, 8	6, 7	4, 5	4, 6	4, 7	4, 8

Si può osservare che la fattorizzazione appena ottenuta non è isomorfa a quella che scaturisce applicando il teorema 1, in quanto quest'ultima non contiene una fattorizzazione di un grafo completo su un insieme di cardinalità 4.

Sussiste infine il seguente teorema, di cui omettiamo la dimostrazione:

Teorema 4 (Tutte, 1947) - Un grafo $G=(V,S)$ ha un 1-fattore se e solo se, per ogni $A \subseteq V$, il numero delle componenti connesse di $G-A$ aventi un numero dispari di vertici è al massimo uguale a $|A|$. \square

Accoppiamenti completi

Siano V_1, V_2 due insiemi non vuoti, finiti e disgiunti, \mathbf{G} un grafo bipartito su V_1, V_2 . Ogni applicazione iniettiva $f: V_1 \rightarrow V_2$ tale che per ogni $x \in V_1$, $f(x)$ è adiacente a x in \mathbf{G} , dicesi un *accoppiamento completo* su V_1 .

Il concetto ora introdotto nacque per risolvere il cosiddetto *problema dei matrimoni* formulato come segue. Dato un insieme finito V_1 di ragazzi e un insieme finito V_2 di ragazze e un grafo bipartito \mathbf{G} su V_1 e V_2 i cui spigoli congiungono i ragazzi e le ragazze che si conoscono tra di loro, sotto quali condizioni è possibile sposare ogni ragazzo di V_1 con una ragazza di V_2 che egli conosce?

Ad esempio, se V_1 è costituito dai 4 ragazzi b_1, b_2, b_3, b_4 , V_2 è costituito dalle 5 ragazze g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 e gli spigoli del grafo bipartito che rappresentano le amicizie sono $\{b_1, g_1\}, \{b_1, g_4\}, \{b_1, g_5\}, \{b_2, g_1\}, \{b_3, g_2\}, \{b_3, g_3\}, \{b_3, g_4\}, \{b_4, g_2\}, \{b_4, g_4\}$, una soluzione è che b_1 sposi g_4 , b_2 sposi g_1 , b_3 sposi g_3 e b_4 sposi g_2 .

Un altro problema è il cosiddetto *problema dei mestieri*, che può essere così formulato: dato un insieme P di persone e un insieme M di mestieri, con $|P| \leq |M|$ e supponendo che ciascuna persona sia qualificata a esercitare solo alcuni dei mestieri, si assegni un mestiere ad ogni persona in modo che il massimo numero di persone possa esercitare un lavoro per cui è qualificato.

Attribuendo a ogni persona un diverso grado di qualificazione nello svolgere i mestieri e supponendo che P e M abbiano la stessa cardinalità, si ottiene il cosiddetto *problema dei mestieri pesato*, che consiste nel determinare un 1-fattore di peso massimo.

In corrispondenza di ogni sottoinsieme non vuoto A di V_1 si indichi con il simbolo A' l'intorno di A . Il seguente teorema, dovuto a HALL, stabilisce una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un accoppiamento completo.

Teorema 1 (Hall, 1935) - *Dati due insiemi non vuoti, finiti e disgiunti V_1, V_2 e un grafo bipartito \mathbf{G} su V_1, V_2 , condizione necessaria e sufficiente affinché esista un accoppiamento completo su V_1 è che, per ogni sottoinsieme non vuoto A di V_1 , si abbia $|A'| \geq |A|$.*

Dimostrazione - Condizione necessaria. Per ipotesi, esiste un accoppiamento completo $f: V_1 \rightarrow V_2$. Se esistesse un sottoinsieme non vuoto A di V_1 per cui $|A'| < |A|$, allora esisterebbe $z \in A$ tale che $f(z) \notin A'$, e quindi $f(z)$ non è adiacente a z in \mathbf{G} , il che nega che f sia un accoppiamento completo.

Condizione sufficiente. Sia m la cardinalità di V_1 . Se $m=1$, la tesi è vera; se no, ragioniamo per induzione, supponendo che il teorema sia vero per ogni sottoinsieme non vuoto di V_1 avente cardinalità minore di m . Si possono verificare i seguenti due casi: 1) Per ogni sottoinsieme proprio A di V_1 , $|A'| \geq |A| + 1$; 2) Esiste un sottoinsieme proprio A di V_1 tale che $|A'| = |A|$.

Nel primo caso, considerato un arbitrario $x \in V_1$ e associato ad esso un qualsiasi elemento y di V_2 adiacente a x in \mathbf{G} , per ogni sottoinsieme non vuoto A di $V_1 - \{x\}$, che ha cardinalità $m-1$, l'insieme dei vertici di $V_2 - \{y\}$ che sono estremi di uno spigolo di \mathbf{G} incidente in A ha cardinalità non inferiore a quella di A , e quindi, per l'ipotesi induttiva, esiste un accoppiamento completo definito su $V_1 - \{x\}$ e a valori in $V_2 - \{y\}$. L'applicazione ottenuta con la posizione $f(x)=y$ è ovviamente un accoppiamento completo su V_1 .

Supponiamo adesso che esista un sottoinsieme proprio A di V_1 avente cardinalità k , ovviamente minore di m , per cui $|A'| = |A| = k$. Per ipotesi, per ogni sottoinsieme B di A , $|B'| \geq |B|$, e quindi, per l'ipotesi induttiva, esiste un accoppiamento completo $f: A \rightarrow A'$. Per ogni sottoinsieme C di $V_1 - A$ avente h elementi ($h \leq m-k$), l'insieme C' degli elementi di $V_2 - A'$ adiacenti in \mathbf{G} a qualche elemento di C deve essere non inferiore a h , perché, altrimenti, si avrebbe $|(A \cup C)'| \leq |A'| + |C'| < k + h = |A \cup C|$, il che è contro l'ipotesi. Ne segue che, per l'ipotesi induttiva, esiste un accoppiamento completo $g: V_1 - A \rightarrow V_2 - A'$, e quindi ovviamente anche un accoppiamento completo su V_1 . \square

6. Grafi planari

Un grafo si dice *planare* se può essere rappresentato nel piano in modo tale che due qualunque suoi spigoli non si intersechino in punti che non siano vertici. In una rappresentazione planare di un grafo si chiama *faccia* ogni regione del piano limitata da un ciclo e non contenente catene aperte formate da almeno due spigoli e con estremi che siano vertici del ciclo. In ogni grafo planare esiste anche la faccia *esterna* o *infinita*.

Teorema 1 (Eulero, 1738) - *In un grafo planare con p componenti connesse, v vertici, s spigoli ed f facce, si ha $v+f=s+p+1$.*

Dim. Si supponga, in un primo momento, $p=1$, e si proceda per induzione su s . Se $s=1$ o $s=2$, la tesi è vera. Sia G un grafo con almeno 3 spigoli. Se G è aciclico, la tesi è vera. Se G non è un albero, allora esiste in esso almeno uno spigolo $\{x,y\}$, la cui soppressione non sconnette G . Sia $G'=G-\{x,y\}$. Evidentemente x,y appartengono a un ciclo che delimita una certa faccia F di G' . Inoltre, in G , in luogo della faccia F , vi sono due facce F' e F'' , che non sono facce di G' . Detti f',s',v' i numeri di facce, spigoli e vertici di G' , si ha $v=v', s=s'+1, f=f'+1$, da cui: $v-s+f=v'-(s'+1)+f'+1=v'-s'+f'=2$. Si supponga ora $p>1$. Relativamente alla i -esima componente connessa, si ha, con ovvio significato dei simboli, $v_i-s_i+f_i=2$, e quindi $\sum(v_i-s_i+f_i)=2p$. D'altra parte, $\sum v_i=v, \sum s_i=s, \sum f_i=f+(p-1)$, dato che la faccia infinita deve essere contata una sola volta. Dunque $v-s+f+p-1=2p$, da cui la tesi.

Corollario 1 - *In un grafo planare connesso con v vertici, s spigoli e con tutte le facce delimitate da cicli di lunghezza r , si ha*

$$s = \frac{r(v-2)}{r-2}$$

Dim. Ogni spigolo appartiene a due r -cicli che delimitano due facce, quindi $2s=rf$, dove f è il numero delle facce del grafo. Per il teorema di EULERO, si ha $v-s+f=2$, e quindi $v-s+\frac{2s}{r}=2$, da cui la tesi.

Teorema 2 - *In un grafo planare avente $v \geq 2$ vertici e s spigoli, si ha $s \leq 3v-6$. Inoltre, se il grafo non contiene triangoli, $s \leq 2v-4$.*

Dim. Diciamo *massimale* un grafo planare tale che, aggiungendo un qualsiasi altro spigolo, si ottiene un grafo non planare. Un tale grafo è evidentemente connesso e ha facce triangolari, e quindi per il corollario precedente, si ha $s=3v-6$. Quindi in un qualsiasi grafo planare con $v \geq 2$ di due vertici si ha $s \leq 3v-6$. Se il grafo avesse tutte facce delimitate da cicli di lunghezza 4, per il lemma precedente si avrebbe $s=2v-4$, e quindi in un grafo che non contiene triangoli si ha $s \leq 2v-4$.

Dal teorema precedente segue che K_5 e K_{33} non sono planari rispettivamente per la prima e per la seconda parte del teorema, dato che K_{33} non ha facce triangolari.

Due grafi si dicono *omeomorfi* se possono essere ottenuti da un medesimo grafo G per suddivisione degli spigoli, cioè inserendo nuovi vertici in certi spigoli. KURATOWSKI dimostrò nel 1930 che un grafo è planare se e solo se non contiene sottografi omeomorfi a K_{33} o a K_5 . Questa proprietà dei grafi planari ha risolto in senso negativo il famoso problema di collegare tre case e tre punti diversi di luce, acqua e gas senza che le condutture si intersechino tra di loro.

Teorema 3 - *Ogni grafo planare semplice $G=(V,S)$ ha almeno un vertice avente grado non superiore a 5. Inoltre, se $|V|\geq 4$, G ha almeno tre vertici a due a due distinti aventi grado non superiore a 5.*

Dim. Siano $n=|V|$, $m=|S|$. Se $n<4$, dato che G è semplice, per ogni $x\in V$, si ha $d(x)<3$, e quindi la tesi è conseguita. Se $n\geq 4$, si supponga in un primo momento che esso sia connesso e, per assurdo, che esistano al più due vertici distinti di G aventi grado non superiore a 5. Ne segue che esistono $n-2$ vertici di G aventi grado non inferiore a 6; siano x_1, x_2 i rimanenti due vertici di G . Poiché $\frac{1}{2}G$ è connesso, si ha $d(x_1)\geq 1$, $d(x_2)\geq 1$, e quindi $2m\geq d(x_1)+d(x_2)+6(n-2)\geq 6n-10$, da cui $m\geq 3n-5>3n-6$, il che contraddice quanto sopra affermato. Se il grafo non fosse connesso, ciascuna delle componenti connesse con almeno 4 vertici avrebbe almeno 3 vertici di grado non superiore a 5 e quindi la tesi sarebbe ulteriormente rafforzata. \square

7. Colorazioni dei vertici di un grafo

Sia $\mathbf{G}=(V, \mathbf{S})$ un grafo. Dato un insieme non vuoto e finito C (detto *insieme di colori*), ogni mappa $f:V \rightarrow C$ tale che, per ogni coppia di vertici adiacenti x, y di \mathbf{G} , si ha $f(x) \neq f(y)$, dicesi una *colorazione dei vertici* di \mathbf{G} . In tal caso, posto $k=|f(V)|$, si suole dire che \mathbf{G} è *k-colorabile* e che f è una *k-colorazione* di \mathbf{G} .

Il minimo numero $k \in \mathbb{N}$ per cui \mathbf{G} è *k-colorabile* dicesi *numero cromatico* di \mathbf{G} e si denota con il simbolo $\chi(\mathbf{G})$. Evidentemente, $\chi(\mathbf{G})=k$ se e solo se \mathbf{G} è *k-colorabile* ma non *k-1-colorabile*.

Osservazioni

Sia $\mathbf{G}=(V, \mathbf{S})$ un grafo e sia \mathbf{G}' un qualunque grafo ottenuto da \mathbf{G} considerando, per ogni coppia di vertici adiacenti di \mathbf{G} , uno e un solo spigolo incidente in tali vertici. Ovviamente, \mathbf{G}' è semplice, e una mappa $f:V \rightarrow C$ è una *k-colorazione* dei vertici di \mathbf{G} se e solo se essa è una *k-colorazione* dei vertici di \mathbf{G}' , cosicchè $\chi(\mathbf{G})=\chi(\mathbf{G}')$. Dunque nello studio delle colorazioni dei vertici di un grafo, si può supporre, senza ledere in alcun modo la generalità della trattazione, che il grafo sia semplice.

Teorema 1 In un qualsiasi grafo semplice con n vertici di grado massimo $\Delta(G)$, densità ω , numero di stabilità interno α , numero cromatico χ , si ha $\omega \leq \chi \leq \Delta + 1$, $n/\alpha \leq \chi \leq n + 1 - \alpha$.

Dim. Poiché tutti i vertici di una clique devono avere colori diversi $\chi(G) \geq \omega(G)$. Proviamo la seconda parte della prima catena di disequivalenze per induzione su n . Il teorema è vero per $n = 1, n = 2$. Sia $n > 2$ e fissiamo un vertice v e sia $G' = G - v$. Posto Δ' il massimo dei gradi dei vertici di G' , si ha $\Delta' \leq \Delta$ e per l'ipotesi induttiva $\chi(G') \leq \Delta(G') + 1 \leq \Delta(G) + 1$. Considerata ora una $\Delta(G) + 1$ -colorazione di G' , si osservi che il vertice v ha grado al massimo $\Delta(G)$ e quindi esiste un colore non attribuito a nessuno dei vertici adiacenti e che dunque è possibile attribuire al vertice v ottenendo una $\Delta(G) + 1$ -colorazione di G . Ci si prova che $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. Una $\chi(G)$ -colorazione di un grafo G partiziona i suoi vertici in classi di colori V_1, V_2, \dots, V_χ , ciascuno dei quali è un insieme stabile e quindi di cardinalità non superiore ad $\alpha(G)$. Ne segue $n \leq \alpha(G)\chi(G)$, da cui $\chi(G) \geq n/\alpha(G)$. Per dimostrare che $\chi(G) \leq n + 1 - \alpha(G)$ si osservi che, se T è un insieme stabile di G tale che $\alpha(G) = |T|$, per il grafo $G - T$ si ha $\chi(G - T) \geq \chi(G) - 1$, poichè se $G - T$ fosse colorabile con meno di $\chi(G) - 1$ colori, G sarebbe colorabile con $\chi(G) - 1$ colori (colorando con un nuovo colore tutti i vertici di T), ma ciò non è possibile per la definizione di $\chi(G)$. Si osservi anche che il numero di vertici di $G - T$ è $n - \alpha(G)$, quindi $\chi(G - T) \leq n - \alpha(G)$. Dalle due osservazioni segue allora $\chi(G) - 1 \leq \chi(G - T) \leq n - \alpha(G)$ e da ciò $\chi(G) \leq n + 1 - \alpha(G)$.

Osservazione Si verifica immediatamente che i cicli di lunghezza dispari e i grafi completi hanno numero cromatico $\Delta + 1$ (mentre i cicli di lunghezza pari hanno numero cromatico Δ) e BROOKS provò nel 1941 che essi sono gli unici grafi il cui numero cromatico è $\Delta + 1$.

Esistono diversi algoritmi che consentono di determinare il numero cromatico di un grafo semplice. Uno dei più importanti è basato sul cosiddetto *principio di connessione-contrazione* e permette altresì di determinare tutte le possibili colorazioni di un grafo a meno di una permutazione dell'insieme dei colori. Si verifica facilmente che, a partire da un grafo semplice non completo \mathbf{G} e applicando ad esso un numero finito di volte gli operatori di connessione e contrazione, si perviene necessariamente a un grafo completo. Inoltre, se f è una *k-colorazione* di \mathbf{G} e x, y sono due vertici non adiacenti di \mathbf{G} , allora, se $f(x) \neq f(y)$, f è una *k-colorazione* di $\mathbf{G}+xy$, mentre, se $f(x)=f(y)$, f è una *k-colorazione* di \mathbf{G}/xy . Da quest'ultima

considerazione trae validità il seguente algoritmo. \square

Algoritmo per la determinazione del numero cromatico

Sia $\mathbf{G}=(V, \mathbf{S})$ un grafo semplice. Se \mathbf{G} è completo, esso ammette solo la colorazione che associa ai vertici di \mathbf{G} colori a due a due distinti e quindi $\chi(\mathbf{G})=|V|$. Se \mathbf{G} non è completo, si consideri l'albero binario formale di radice \mathbf{G} e avente per vertici tutti i grafi ottenuti da \mathbf{G} individuando, ad ogni passo, un'arbitraria coppia di vertici non adiacenti e applicando, finché non si perviene a un grafo completo, gli operatori di connessione e contrazione.

L'insieme costituito dalle foglie dell'albero binario su definito dicesi una *scomposizione di \mathbf{G} in classi di colorazione* o una *C-scomposizione di \mathbf{G}* e si denota con il simbolo $C(\mathbf{G})$.

Teorema 2 - Sia \mathbf{G} un grafo semplice non completo.

- i) - L'insieme $C(\mathbf{G})$ è costituito da grafi completi;*
- ii) - Il numero cromatico di \mathbf{G} coincide con il minimo dell'insieme costituito dal numero dei vertici dei grafi di $C(\mathbf{G})$;*
- iii) - Il numero dei grafi completi di $C(\mathbf{G})$ aventi lo stesso numero di vertici r rappresenta il numero delle possibili r -colorazioni dei vertici di \mathbf{G} a meno di una permutazione di colori;*
- iv) - Ognuna delle predette colorazioni si ottiene assegnando colori a due a due distinti ai vertici di ciascuno dei grafi di $C(\mathbf{G})$ e lo stesso colore agli eventuali vertici su cui si è applicato l'operatore di contrazione.*

Siano $n=|V|$, $\chi=\chi(\mathbf{G})$. Per quanto sopra, \mathbf{G} non può essere k -colorabile quando $k>n$ o $k<\chi$, e quindi, per il teorema precedente, in $C(\mathbf{G})$ non possono esistere grafi completi con un numero di vertici $k>n$ o $k<\chi$. Indicando, per ogni $r \in \mathbb{N}$, $\chi \leq r \leq n$, con il simbolo a_r il numero di grafi di $C(\mathbf{G})$ il cui insieme di vertici ha cardinalità r , si suole scrivere formalmente:

$$C(\mathbf{G}) = a_n \mathbf{K}_n + a_{n-1} \mathbf{K}_{n-1} + \dots + a_\chi \mathbf{K}_\chi$$

In tale espressione, si ha ovviamente $a_n \neq 0$, $a_\chi \neq 0$.

Esempio

Determinare, mediante applicazione dell'algoritmo, la scomposizione in classi di colorazione del grafo rappresentato nella figura seguente.

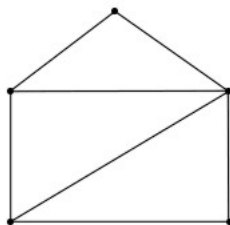


Figura 16

Si trova che il numero cromatico del grafo è 3 e che sono ammesse una 5-colorazione, tre 4-colorazioni e una 3-colorazione, cosicché la scomposizione del grafo in classi di colorazione è $\mathbf{K}_5+3\mathbf{K}_4+\mathbf{K}_3$.

L'algoritmo per la ricerca del numero cromatico consente anche di determinare il polinomio cromatico di un grafo, cioè la funzione (polinomiale) $P(\mathbf{G}; \lambda)$ che calcola il numero di λ -colorazioni possibili sui vertici di \mathbf{G} . Sono infatti immediate le seguenti osservazioni:

1. Il numero di possibili λ -colorazioni di un grafo completo su n vertici coincide con il numero $[\lambda]_n$ di disposizioni senza ripetizioni di classe n su λ oggetti;
2. Si ha $P(\mathbf{G}; \lambda) = P(G_1; \lambda) \cdot P(G_2; \lambda) \cdot \dots \cdot P(G_p; \lambda)$, dove G_1, G_2, \dots, G_p sono le componenti connesse di G . Infatti, ogni componente connessa può essere colorata in modo indipendente dalle altre.
3. Si ha $P(G; \lambda) = P(G + xy; \lambda) + P(G/xy; \lambda)$, per ogni coppia di vertici non adiacenti x, y di un grafo non completo G . Infatti $P(G + xy; \lambda)$ è il numero di componenti delle λ -colorazioni che assegnano ai vertici x, y colori diversi, mentre $P(G/xy; \lambda)$ è il numero di componenti delle λ -colorazioni che assegnano ai vertici x, y lo stesso colore.

Applicando queste proprietà, si può calcolare per il principio di connessione e contrazione il polinomio cromatico di qualunque grafo. Ad esempio per il grafo dell'esempio precedente si ha: $P(G; \lambda) = P(K_5; \lambda) + 3P(K_4; \lambda) + P(K_3; \lambda) = [\lambda]_5 + 3[\lambda]_4 + [\lambda]_3 = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)^3$. Per esempio, esistono 6 modi possibili di colorare G con tre colori.

Mediante il polinomio cromatico si può risolvere il seguente problema di calcolo combinatorio:

Problema delle disposizioni condizionate: Sia A un alfabeto con λ lettere, n un numero naturale e sia $S \subseteq \{\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq n\}$. Qual è il numero di parole di lunghezza n che si possono scrivere con le lettere di A e con la condizione che la i -esima lettera sia distinta dalla j -esima lettera per ogni coppia $\{i, j\} \in S$?

Risulta immediato che, considerato il grafo $G = (\{1, 2, \dots, n\}, S)$, il numero richiesto è uguale a $P(G; \lambda)$ ed è pertanto calcolabile mediante l'algoritmo per la ricerca del numero cromatico. In particolare si ha che $D_{\lambda, n}^r = P(\Omega_n; \lambda) = \lambda^n$ e $D_{\lambda, n} = P(K_n; \lambda) = [\lambda]_n$. Ad esempio si trova che il numero di parole di lunghezza n che si possono scrivere con λ lettere con la condizione che ogni lettera sia distinta dalla successiva e l'ultima distinta dalla prima è $D_{\lambda, C_n} = P(C_n; \lambda) = (\lambda - 1)^n + (-1)^n(\lambda - 1)$.

Un problema sul numero cromatico di un grafo riguarda la predisposizione del diario delle lezioni e degli esami universitari in maniera tale che nessuno studente debba seguire lezioni contemporaneamente o sostenere esami lo stesso giorno. Anche il problema dell'assegnazione di frequenze televisive è un problema sul numero cromatico, dato che due trasmettitori televisivi che si trovano a meno di 100 miglia di distanza l'uno dall'altro devono usare frequenze diverse. \square

Colorazioni dei vertici dei grafi planari

Nel paragrafo 6, è stato provato che, in ogni grafo planare \mathbf{G} , esiste almeno un vertice di grado ≤ 5 . In base a questo asserto, dimostriamo il seguente teorema dei cinque colori:

Teorema 3 (dei cinque colori) - Per ogni grafo planare \mathbf{G} , si ha $\chi(\mathbf{G}) \leq 5$.

Dimostrazione - In virtù dell'osservazione iniziale del paragrafo precedente, si può supporre che \mathbf{G} sia semplice.

In base alla definizione di numero cromatico, basta provare che esiste una k -colorazione di \mathbf{G} , con $k \leq 5$. Sia $n = |V|$ e si dimostri il teorema per induzione osservando che, se $n < 5$, la tesi è immediatamente conseguita. Se $n > 5$, si supponga che la tesi sia vera per ogni grafo planare semplice avente $n-1$ vertici. Per il teorema 3 del paragrafo precedente, esiste almeno un vertice v di \mathbf{G} tale che $d(v) \leq 5$, e, per l'ipotesi induttiva, $\chi(\mathbf{G}-v) \leq 5$, cosicché esiste una k -colorazione f dei vertici di $\mathbf{G}-v$, con $k \leq 5$.

Si possono verificare due casi: 1) $d(v) < 5$; 2) $d(v) = 5$.

Nel primo caso, esistono al più quattro vertici di G adiacenti a v , e quindi è possibile estendere la colorazione f ai vertici di G assegnando a v un colore distinto da tutti quelli che f associa ai vertici ad esso adiacenti, ottenendo una k colorazione dei vertici di G con $k \leq 5$.

Nel secondo caso, possono verificarsi due sottocasi: 2a) f associa lo stesso colore ad almeno due vertici adiacenti a v ; 2b) f associa ai cinque vertici adiacenti a v colori a due a due distinti.

Nel caso 2a) si può ripetere esattamente quanto affermato per il caso 1).

Consideriamo il caso 2b) e indichiamo con x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 i vertici adiacenti a v , ponendo $f(x_1)=A$, $f(x_2)=B$, $f(x_3)=C$, $f(x_4)=D$, $f(x_5)=E$. Siano H_{AC} il sottografo di $G-v$ costituito da tutti i vertici a cui f associa il colore A o il colore C e $H_{AC}(x_1)$ la componente connessa di H_{AC} contenente il vertice x_1 . Si possono presentare i seguenti due casi: 2b1) Non esiste un cammino di H_{AC} congiungente x_1 con x_3 (ossia x_1 e x_3 non sono vertici di una stessa componente connessa di H_{AC}); 2b2) Esiste un cammino π_{13} di H_{AC} congiungente x_1 con x_3 (ossia x_1 e x_3 sono vertici della stessa componente connessa di H_{AC}).

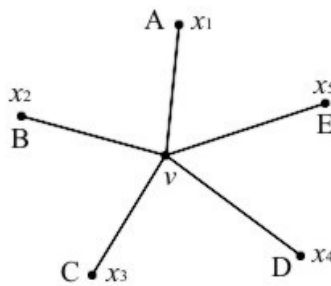


Figura 17

Nel primo caso è possibile definire una 5-colorazione g dei vertici di G mediante le seguenti posizioni:

$$\begin{aligned} g(x) &= C \text{ se } x \text{ è vertice di } H_{AC}(x_1) \text{ e } f(x) = A \\ g(x) &= A \text{ se } x \text{ è vertice di } H_{AC}(x_1) \text{ e } f(x) = C \\ g(x) &= f(x) \text{ se } x \text{ non è vertice di } H_{AC}(x_1) \\ g(x) &= A \text{ se } x = v \end{aligned}$$

Nel secondo caso, siano H_{BD} il sottografo di $G-v$ costituito da tutti i vertici cui f associa il colore B o il colore D e $H_{BD}(x_2)$ la componente connessa di H_{BD} contenente il vertice x_2 . Poiché G è planare, non esiste un cammino π_{24} di H_{BD} congiungente x_2 con x_4 , perché, altrimenti, π_{13} e π_{24} avrebbero almeno un vertice in comune, il che è falso, in quanto a ogni vertice di π_{13} f associa il colore A o il colore C, mentre ad ogni vertice di π_{24} f associa il colore B o il colore D.

Quindi è possibile, in maniera del tutto analoga al caso precedente, definire una 5-colorazione dei vertici di G mediante le seguenti posizioni:

$$\begin{aligned} g(x) &= D \text{ se } x \text{ è vertice di } H_{BD}(x_2) \text{ e } f(x) = B \\ g(x) &= B \text{ se } x \text{ è vertice di } H_{BD}(x_2) \text{ e } f(x) = D \\ g(x) &= f(x) \text{ se } x \text{ non è vertice di } H_{BD}(x_2) \\ g(x) &= B \text{ se } x = v \end{aligned}$$

□

Il teorema ora dimostrato è stato migliorato da KENNETH APPEL e WOLFGANG HAKEN, i quali, con l'ausilio di potenti calcolatori, hanno risolto in modo definitivo la ben nota congettura dei quattro colori, che, sin dal 1852, costituiva uno dei problemi aperti più famosi della matematica discreta.

Teorema 4 (dei quattro colori) - Per ogni grafo planare \mathbf{G} , si ha $\chi(\mathbf{G}) \leq 4$. \square

Nota storica

Il celebre problema dei quattro colori fu introdotto nel 1852 da FRANCIS GUTHRIE, il quale si rese conto che erano sufficienti quattro colori per colorare una mappa della Gran Bretagna in modo che due stati confinanti non avessero lo stesso colore.

Da un punto di vista matematico conviene precisare il concetto di carta geografica: gli stati sono regioni del piano connesse (cioè non sono ammesse *enclavi*), e due stati sono *confinanti* se e solo se hanno una linea in comune e non soltanto un numero finito di punti (altrimenti una figura a torta sarebbe un controesempio del teorema).

Nella realtà esistono stati il cui territorio costituisce un insieme non connesso, come ad esempio l'enclave di Kaliningrad, possedimento russo completamente circondato dalla Polonia e dalla Lituania. Per colorare mappe di questo tipo quattro colori potrebbero non essere sufficienti, in quanto il grafo che le modella potrebbe non essere planare. La colorazione della mappa rappresentata nella figura seguente, ad esempio, richiede cinque colori, dal momento che la regione A non connessa è costituita da territori contigui a quattro altre regioni, ciascuna delle quali confina con tutte le altre.

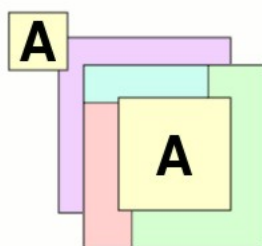


Figura 18

La risposta affermativa al problema dei quattro colori, congetturata da PERCY HEAWOOD, che nel 1890 aveva dimostrato che cinque colori sono comunque sufficienti, è stata motivata soltanto nel 1977 da KENNETH APPEL e WOLFGANG HAKEN con una complessa dimostrazione assistita dal computer, cui si è pervenuti sulla base di un certo numero di precedenti errate dimostrazioni, tra cui quella di ALFRED KEMPE del 1879 e quella di PETER TAIT del 1880, che erano state confutate rispettivamente dallo stesso HEAWOOD nel 1890 e da PETERSEN nel 1891.

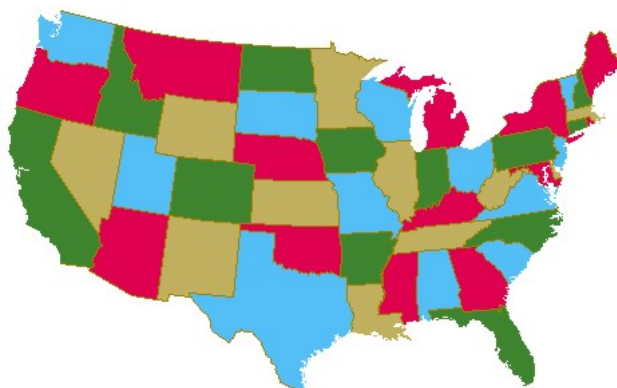


Figura 19

L'utilizzazione del computer nella dimostrazione del teorema ha scatenato una fervente diatriba sull'affidabilità degli algoritmi, arrivando a mettere in dubbio la validità stessa della prova. In pratica, la dimostrazione consiste nel ricondurre una qualsiasi configurazione a un numero finito, anche se molto elevato, di topologie, mediante una serie di trasformazioni che modificano le relative posizioni delle aree interessate ma non le proprietà topologiche della mappa. Il programma, eseguito su due macchine con diversi algoritmi, verificava che per ciascuna di queste configurazioni esiste una colorazione che impiega non più di quattro colori.

L'analisi di casi discreti per mezzo del calcolatore solleva dubbi sul fatto che non sussiste la certezza che un algoritmo sia stato implementato correttamente. Infatti, non è possibile dimostrare la correttezza di un algoritmo ma solo la sua non correttezza, mediante una controprova. Ad ogni modo, nell'algoritmo non è stato riscontrato alcun errore.

Un'altra dimostrazione è stata proposta nel 2000 ed è consultabile nel sito www.geocities.com/dharwadker.

Colorazioni dei vertici dei grafi di permutazione

Definizioni - Siano $\mathbf{G}=(V, \mathbf{S})$ un grafo, dove $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $\mathbf{G}'=(V', \mathbf{S}')$ un grafo isomorfo a \mathbf{G} , dove $V'=\{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$, α una permutazione sull'insieme $\{1, 2, \dots, n\}$. Il grafo avente per insieme dei vertici $V \cup V'$ e il cui insieme degli spigoli \tilde{S} è così definito

$$\{x, y\} \in \tilde{S} \leftrightarrow \{x, y\} \in S \text{ o } \{x, y\} \in S' \text{ o esistono } i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ tali che } x=v_i, y=v'_j, j=\alpha(i)$$

dicesi *grafo α -permutato a partire da \mathbf{G}, \mathbf{G}'* e si denota con uno dei simboli $P_\alpha(\mathbf{G}, \mathbf{G}')$ o $P_\alpha(\mathbf{G})$.

In altri termini, gli spigoli di $P_\alpha(\mathbf{G}, \mathbf{G}')$ sono gli spigoli di \mathbf{G} , gli spigoli di \mathbf{G}' e le coppie $\{v_i, v'_j\}$ tali che $j=\alpha(i)$.

Esercizio - Dati due grafi $\mathbf{G}=(V, \mathbf{S})$, $\mathbf{G}'=(V', \mathbf{S}')$, entrambi isomorfi a \mathbf{K}_3 , dove $V=\{v_1, v_2, v_3\}$ e $V'=\{v'_1, v'_2, v'_3\}$, e data la permutazione $\alpha(1)=3, \alpha(2)=2, \alpha(3)=1$, rappresentare il grafo $P_\alpha(\mathbf{G}, \mathbf{G}')$.

Teorema 1 (Chartrand) - Per ogni grafo $\mathbf{G}=(V, \mathbf{S})$ e per ogni permutazione α di $\{1, \dots, |V|\}$, si ha:

$$\chi(\mathbf{G}) \leq \chi(P_\alpha(\mathbf{G})) \leq \lceil \frac{4}{3} \chi(\mathbf{G}) \rceil$$

dove, per ogni numero reale positivo α , il simbolo $\lceil \alpha \rceil$ rappresenta lo stesso numero α se α è intero e il numero naturale successivo alla parte intera di α se α non è intero.

Dimostrazione - Ovviamente, \mathbf{G} è sottografo di $P_\alpha(\mathbf{G})$, e quindi, per una nota proprietà del numero cromatico, si ha $\chi(\mathbf{G}) \leq \chi(P_\alpha(\mathbf{G}))$.

Proviamo che esistono casi in cui vale l'uguaglianza $\chi(\mathbf{G}) = \chi(P_\alpha(\mathbf{G}))$. Siano $\mathbf{G}'=(V', \mathbf{S}')$ un grafo isomorfo a \mathbf{G} e $\chi(\mathbf{G})=p$. Allora esiste una p -colorazione f dei vertici di \mathbf{G} che induce una partizione di V in p classi di colorazione V_1, V_2, \dots, V_p e una corrispondente partizione di V' in p classi di colorazione V'_1, V'_2, \dots, V'_p . Indicata con I la permutazione identica su $\{1, 2, \dots, |V|\}$, e posto, per ogni $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, $f(V_i)=A_i$, si può definire una p -colorazione g dei vertici di $P_\alpha(\mathbf{G})$ nel seguente modo:

$$\begin{aligned} g(x) &= A_i \text{ se } x \in V_i \text{ per ogni } i \in \{1, 2, \dots, p\} \\ g(x) &= A_{i+1} \text{ se } x \in V'_i \text{ per ogni } i \in \{1, 2, \dots, p-1\} \\ g(x) &= A_1 \text{ se } x \in V'_p \end{aligned}$$

Dimostriamo adesso che $\chi(P_\alpha(\mathbf{G})) \leq \lceil \frac{4}{3} \chi(\mathbf{G}) \rceil$.

Si possono presentare due casi: 1) $\lceil \frac{4}{3}\chi(\mathbf{G}) \rceil$ è un numero pari; 2) $\lceil \frac{4}{3}\chi(\mathbf{G}) \rceil$ è un numero dispari.

Caso 1) $\lceil \frac{4}{3}\chi(\mathbf{G}) \rceil = 2h, h \in \mathbb{N}$.

Siano $A_1, A_2, \dots, A_h, A_{h+1}, A_{h+2}, \dots, A_{2h}$ $2h$ colori a due a due distinti e proviamo che esiste una $2h$ colorazione per $P_\alpha(\mathbf{G})$. Si assegnino alle classi V_1, V_2, \dots, V_h rispettivamente i colori A_1, A_2, \dots, A_h e alle classi V'_1, V'_2, \dots, V'_h rispettivamente i colori $A_{h+1}, A_{h+2}, \dots, A_{2h}$.

Per i vertici delle $p-h$ classi rimanenti di \mathbf{G} $V_{h+1}, V_{h+2}, \dots, V_p$ e delle $p-h$ classi rimanenti di \mathbf{G}' $V'_{h+1}, V'_{h+2}, \dots, V'_p$ si procede nel modo seguente.

Sia $j \in \{1, 2, \dots, p-h\}$ e si consideri la classe V_{h+j} . Per ogni $x \in V_{h+j}$, si attribuisca a x il colore A_{h+j} se, nel grafo $P_\alpha(\mathbf{G})$, x non è adiacente a un vertice appartenente alla classe V'_j (cui è già stato assegnato il colore A_{h+j}) e si assegni a x il colore A_{2h-j+1} se, nel grafo $P_\alpha(\mathbf{G})$, x è adiacente a un vertice appartenente alla classe V'_j .

Analogamente, considerata la classe V'_{h+j} , per ogni $y \in V'_{h+j}$, si attribuisca a y il colore A_j se, nel grafo $P_\alpha(\mathbf{G})$, y non è adiacente a un vertice appartenente alla classe V_j (cui è già stato assegnato il colore A_j) e si assegni a y il colore A_{h-j+1} se, nel grafo $P_\alpha(\mathbf{G})$, y non è adiacente a un vertice appartenente alla classe V_j . Il tutto è riassunto nella seguente tabella:

V_1	V_2	\dots	V_h	V_{h+1}	V_{h+2}	V_{h+3}	\dots	V_p
A_1	A_2	\dots	A_h	A_{h+1}	A_{h+2}	A_{h+3}	\dots	\dots
				A_{2h}	A_{2h-1}	A_{2h-2}	\dots	\dots
V'_1	V'_2	\dots	V'_h	V'_{h+1}	V'_{h+2}	V'_{h+3}	\dots	V'_p
A_{h+1}	A_{h+2}	\dots	A_{2h}	A_1	A_2	A_3	\dots	\dots
				A_h	A_{h-1}	A_{h-2}	\dots	\dots

Ovviamente gli assegnamenti posti verificano le condizioni di colorabilità del grafo $P_\alpha(\mathbf{G})$, purché gli h colori attribuiti alle classi V_1, V_2, \dots, V_h siano sufficienti a colorare le classi $V'_{h+1}, V'_{h+2}, \dots, V'_p$, per cui sono necessari $2(p-h)$ colori, e che, simmetricamente, gli h colori attribuiti alle classi V'_1, V'_2, \dots, V'_h siano sufficienti a colorare le classi $V_{h+1}, V_{h+2}, \dots, V_p$. A tale scopo basta osservare che, essendo $\lceil \frac{4}{3}p \rceil = 2h$, si ha $\frac{4}{3}p \leq 2h, 2p \leq 3h$ e quindi $h \geq 2(p-h)$.

Caso 2) $\lceil \frac{4}{3}\chi(\mathbf{G}) \rceil = 2h+1, h \in \mathbb{N}$.

Siano $A_1, A_2, \dots, A_h, A_{h+1}, A_{h+2}, \dots, A_{2h+1}$ $2h+1$ colori a due a due distinti e proviamo che esiste una $2h+1$ colorazione per $P_\alpha(\mathbf{G})$. Si assegnino alle classi $V_1, V_2, \dots, V_h, V_{h+1}$ rispettivamente i colori $A_1, A_2, \dots, A_h, A_{h+1}$ e alle classi V'_1, V'_2, \dots, V'_h rispettivamente i colori $A_{h+2}, A_{h+3}, \dots, A_{2h+1}$.

Per i vertici delle $p-h-1$ classi rimanenti di \mathbf{G} $V_{h+2}, V_{h+3}, \dots, V_p$ e delle $p-h$ classi rimanenti di \mathbf{G}' $V'_{h+1}, V'_{h+2}, \dots, V'_p$ si procede in modo analogo a quanto fatto nel primo caso, come è indicato nella seguente tabella:

V_1	V_2	\dots	V_h	V_{h+1}	V_{h+2}	V_{h+3}	\dots	V_p
A_1	A_2	\dots	A_h	A_{h+1}	A_{h+2}	A_{h+3}	\dots	\dots
					A_{2h+1}	A_{2h}	\dots	\dots
V'_1	V'_2	\dots	V'_h	V'_{h+1}	V'_{h+2}	V'_{h+3}	\dots	V'_p
A_{h+2}	A_{h+3}	\dots	A_{2h+1}	A_1	A_2	A_3	\dots	\dots
				A_{h+1}	A_h	A_{h-1}	\dots	\dots

Ovviamente gli assegnamenti posti verificano le condizioni di colorabilità del grafo $P_\alpha(\mathbf{G})$, purché gli $h+1$ colori attribuiti alle classi $V_1, V_2, \dots, V_h, V_{h+1}$ siano sufficienti a colorare le classi $V'_{h+1}, V'_{h+2}, \dots, V'_p$, per cui sono necessari $2(p-h)$ colori, e che gli h colori attribuiti alle classi V'_1, V'_2, \dots, V'_h siano sufficienti a colorare le classi $V_{h+2}, V_{h+3}, \dots, V_p$, per cui sono invece necessari $2(p-h-1)$ colori. In sostanza, bisogna provare che $h+1 \geq 2(p-h)$ e che $h \geq 2(p-h-1)$.

A tale scopo basta osservare che, essendo $\lceil \frac{4}{3}p \rceil = 2h+1$, si ha $\frac{4}{3}p \leq 2h+1, 4p \leq 6h+3, 2p \leq 3h+\frac{3}{2}$ e quindi $2p \leq 3h+1$, da cui $h+1 \geq 2(p-h)$. Verificata questa disuguaglianza, risulta provato anche che $h \geq 2(p-h-1)$.

Proviamo infine che esiste almeno un grafo \mathbf{G} e una permutazione β tali che $\chi(P_\beta(\mathbf{G})) = \lceil \chi(\mathbf{G}) \rceil$. A tale scopo, siano V_1, V_2, \dots, V_p p insiemi a due a due disgiunti aventi ciascuno cardinalità p e \mathbf{G} il grafo completo pluripartito definito su V_1, V_2, \dots, V_p ; siano inoltre V'_1, V'_2, \dots, V'_p p insiemi a due a due disgiunti aventi ciascuno cardinalità p e \mathbf{G}' il grafo completo pluripartito definito su V'_1, V'_2, \dots, V'_p . I vertici di \mathbf{G} si possono quindi indicare con i simboli $v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1p}, v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2p}, \dots, v_{p1}, v_{p2}, \dots, v_{pp}$ e analogamente i vertici di \mathbf{G}' si possono indicare con i simboli $v'_{11}, v'_{12}, \dots, v'_{1p}, v'_{21}, v'_{22}, \dots, v'_{2p}, \dots, v'_{p1}, v'_{p2}, \dots, v'_{pp}$ e, ovviamente, \mathbf{G} e \mathbf{G}' sono isomorfi e si ha $\chi(\mathbf{G}) = p$.

Sia β la permutazione indotta dalla mappa che a ogni coppia di indici $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$ associa la coppia (j, i) e si supponga che $\chi(P_\beta(\mathbf{G})) < \lceil \frac{4}{3}p \rceil$. Allora esiste una χ -colorazione dei vertici di $P_\beta(\mathbf{G})$ con $\chi < \lceil \frac{4}{3}p \rceil$. In tale colorazione, agli insiemi V_1, V_2, \dots, V_p devono essere assegnati colori a due a due distinti e lo stesso dicasi per gli insiemi V'_1, V'_2, \dots, V'_p . Siano r, s il numero degli insiemi rispettivamente tra V_1, V_2, \dots, V_p e V'_1, V'_2, \dots, V'_p ai cui elementi la colorazione considerata associa lo stesso colore. Detti a, b il numero dei colori utilizzati dalla colorazione per colorare i vertici rispettivamente di V e di V' , si ha quindi:

$$r + 2(p - r) \leq a \leq \chi$$

$$s + 2(p - s) \leq b \leq \chi$$

da cui $4p - 2\chi \leq r + s$.

Si osservi che, per ogni $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, esistono $x \in V_i, y \in V'_j$ tali che x, y sono adiacenti in $P_\beta(\mathbf{G})$, e quindi i colori attribuiti dalla colorazione suddetta agli $r+s$ insiemi monocromatici sono a due a due distinti, cosicché $r+s \leq \chi$.

Si ha quindi $4p - 2\chi \leq \chi$, da cui $\chi \geq \frac{4}{3}p$ e $\chi \geq \lceil \frac{4}{3}p \rceil$, il che è contrario all'ipotesi di partenza. Non può quindi esistere una χ -colorazione dei vertici di $P_\beta(\mathbf{G})$ con $\chi < \lceil \frac{4}{3}p \rceil$, cosicché $\chi(P_\beta(\mathbf{G})) = \lceil \frac{4}{3}\chi(\mathbf{G}) \rceil$. \square

8 Colorazioni degli spigoli di un grafo

Analogamente a quanto fatto per i vertici si può definire una colorazione degli spigoli di un grafo in maniera tale che due spigoli incidenti nello stesso vertice non abbiano lo stesso colore. Il minimo numero di colori necessario è chiamato indice cromatico del grafo ($\chi'(G)$) e Vizing dimostrò nel 1960 che esso per un grafo semplice è sempre uguale al massimo dei gradi dei vertici o al numero naturale successivo di esso. Da questo importante teorema nasce una classificazione dei grafi in due classi: un grafo G si dice di classe 1 se $\chi'(G) = \Delta$, si dice di classe 2 se $\chi'(G) = \Delta + 1$. È immediato che i cicli di lunghezza pari sono grafi di classe 1 e quelli di lunghezza dispari sono di classe 2.

Si ha inoltre il seguente

Teorema 1 - I grafi completi di cardinalità pari sono di classe 1 e quelli di cardinalità dispari di classe 2.

Dim. Sia $G = K_n$, con n dispari. Consideriamo il grafo K_{n+1} , con $V(K_{n+1}) = V(G) \cup \{\infty\} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \cup \{\infty\}$. Essendo $n + 1$ pari, esiste una 1-fattorizzazione di K_{n+1} e sia F_i il suo 1-fattore contenente lo spigolo $\{v_i, \infty\}$. Assegnando il colore i agli spigoli del fattore F_i si ottiene una n -colorazione degli spigoli di K_{n+1} e quindi anche una n -colorazione degli spigoli di K_n . Ciò implica $\chi'(G) \leq n$. D'altra parte, non è difficile convincersi del fatto che un medesimo colore può essere assegnato al più a $\frac{n-1}{2}$ spigoli, quindi con $n - 1$ colori si possono colorare al più $(n - 1) \frac{n-1}{2}$, invece degli $n \frac{n-1}{2}$ spigoli del grafo K_n . Ne segue che $\chi'(G) \geq n$ e quindi $\chi'(G) = n = \Delta + 1$, quindi G è di classe 2. In modo ancor più semplice si deduce che un grafo completo di cardinalità pari, che è sempre 1-fattorizzabile, ha $\chi'(G) = n - 1 = \Delta$ e quindi è di classe 1.

Grafi di confusione e prodotto normale di grafi

Nella teoria della comunicazione, un canale rumoroso produce un grafo di confusione, un grafo i cui vertici sono elementi di un alfabeto di trasmissione T e che ha uno spigolo fra due lettere di T se e solo se, quando vengono inviate attraverso il canale, possono essere ricevute come la stessa lettera. Dato un canale rumoroso, scegliendo nel suo grafo di confusione un insieme stabile, si ottiene un alfabeto non ambiguo per inviare i messaggi. Il numero di stabilità di un grafo di confusione indica dunque la massima cardinalità di un alfabeto non ambiguo in quel canale rumoroso. Possiamo trovare un alfabeto non ambiguo più ampio utilizzando combinazioni di lettere. Utilizzando ad esempio coppie di lettere dell'alfabeto T si ha che due stringhe xy e uv possono essere confuse se e solo se vale una delle seguenti condizioni:

1. x, u possono essere confuse e y, v possono essere confuse;
2. $x = u$ e y, v possono essere confuse;
3. $y = v$ e x, u possono essere confuse.

Introduciamo adesso la seguente definizione: Dati due grafi G, H il prodotto normale $G \cdot H$ dei due grafi è un grafo che ha come vertici gli elementi del prodotto cartesiano $V(G) \times V(H)$ e tale che esiste uno spigolo fra (a, b) e (c, d) se e solo se vale una di queste condizioni:

1. $(a, c) \in S(G)$ e $(b, d) \in S(H)$;

2. $a=c$ e $(b, d) \in S(H)$;
3. $b=d$ e $(a, c) \in S(G)$.

In questo modo se G è il grafo di confusione dell'alfabeto T , il grafo di confusione del nuovo alfabeto \tilde{G} è $G \cdot G$. Ma qual è il legame fra i numeri di stabilità $\tilde{v}_i^{\frac{1}{2}}$ dei grafi fattori e del grafo prodotto? Per rispondere a tale domanda, occorre premettere il teorema di Ramsey del 1930. Si dice che un numero naturale N ha la proprietà di Ramsey (p, q) , con p, q naturali maggiori di 1, se un qualsiasi grafo con N vertici ha o una clique di p vertici o un insieme stabile di q vertici. Il minimo di tali numeri si dice numero di RAMSEY e si indica con il simbolo $R(p, q)$.

Teorema 1 - Un numero naturale N ha la proprietà di RAMSEY (p, q) se e solo se colorando con soli due colori gli spigoli di \mathbf{K}_N , esso ha una clique di ordine p di un colore oppure di ordine q dell'altro colore.

Dim. Supponiamo che N abbia la proprietà di Ramsey (p, q) , allora un qualsiasi grafo con N vertici ha o una clique di p vertici o un insieme stabile di q vertici. Consideriamo una colorazione di spigoli di \mathbf{K}_N con rosso e blu e sia G il sottografo costituito da tutti gli N vertici e dai soli spigoli colorati in rosso. Applicando ad esso la proprietà di RAMSEY si ottiene o una clique rossa di ordine p oppure un insieme stabile in G che è quindi una clique blu di ordine q .

Viceversa, consideriamo un qualsiasi grafo G con N vertici. Coloriamo tutti i suoi spigoli di rosso e completiamolo ad un \mathbf{K}_N , colorando di blu gli altri spigoli. Allora, per ipotesi, il nuovo grafo ha una clique rossa di p vertici oppure una clique blu di q vertici. Ciò equivale a dire che G ha o una clique di p vertici o un insieme stabile di q vertici.

Lemma - Se $p_1 + p_2 + \dots + p_k - k + 1$ oggetti sono contenuti in k cassette, allora esiste un cassetto che contiene almeno p_i oggetti per un certo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Dim. Supponiamo per assurdo che il cassetto i -esimo contenga al massimo $p_i - 1$ oggetti, allora il numero totale di oggetti $\tilde{v}_i^{\frac{1}{2}}$ al massimo $p_1 + p_2 + \dots + p_k - k$, contro l'ipotesi.

Teorema 2 - Per ogni coppia di numeri naturali p, q maggiori di 1, esiste $R(p, q)$ e, se p, q sono maggiori di 2 si ha anche $R(p, q) \leq R(p, q - 1) + R(p - 1, q)$.

Dim. Sia $k = p + q \geq 4$. Ragioniamo per induzione su k . Dalla definizione segue che $R(2, q) = q$ e $R(p, 2) = p$ per ogni valore di p, q maggiore di 1. Siano allora p, q entrambi maggiori di 2 e quindi $k > 4$; per l'ipotesi induttiva esistono $R(p, q - 1)$, $R(p - 1, q)$. Sia G un grafo di $R(p, q - 1) + R(p - 1, q)$ vertici e fissiamo un vertice v in G . Sia C l'insieme dei vertici adiacenti a v in G e $D = V(G) \setminus (C \cup \{v\})$. Poichè $\tilde{v}_i^{\frac{1}{2}}$ il numero di vertici diversi da v $\tilde{v}_i^{\frac{1}{2}}$ $R(p, q - 1) + R(p - 1, q) - 1$, il lemma precedente implica che C ha almeno $R(p - 1, q)$ vertici oppure D ha almeno $R(p, q - 1)$ vertici. Se accade la prima evenienza il sottografo di G generato dai vertici in C ha una clique di $p - 1$ vertici oppure un insieme stabile di q vertici. Poichè $\tilde{v}_i^{\frac{1}{2}}$ v $\tilde{v}_i^{\frac{1}{2}}$ adiacente a tutti i vertici di D , il sottografo di G generato dai vertici di $C \cup \{v\}$ ha una clique di p vertici o un insieme stabile di q vertici. Quindi G ha una clique di p vertici o un insieme stabile di q vertici e dunque esiste $R(p, q)$ e $R(p, q) \leq R(p, q - 1) + R(p - 1, q)$. Se accade la seconda evenienza, per definizione di $R(p, q - 1)$, il sottografo di G generato dai vertici in D ha una clique di p vertici oppure un insieme stabile di $q - 1$ vertici. Poichè $\tilde{v}_i^{\frac{1}{2}}$ v non $\tilde{v}_i^{\frac{1}{2}}$ adiacente a nessun vertice di D , il sottografo di G generato dai vertici di $D \cup \{v\}$ ha una clique di p vertici o un insieme stabile di q vertici. Quindi G ha una clique di p vertici o un insieme stabile di q vertici e dunque esiste $R(p, q)$ e $R(p, q) \leq R(p, q - 1) + R(p - 1, q)$.

Possiamo ora rispondere alla domanda posta con il seguente teorema dimostrato da HERDRLIN nel 1966:

Teorema 3 - Se G, H sono due grafi, allora $\alpha(G \cdot H) \leq R(\alpha(G) + 1, \alpha(H) + 1) - 1$.

Dim. Sia $N = R(\alpha(G) + 1, \alpha(H) + 1)$. Supponiamo che $\alpha(G \cdot H) \geq N$. Sia I un insieme stabile di $G \cdot H$ con N vertici. Supponiamo che (a, b) e (c, d) sono due vertici distinti in I . Poichè I è stabile,

1. $a \neq c \wedge (a, c) \notin E(G)$
2. oppure $b \neq d \wedge (b, d) \notin E(H)$.

Consideriamo un grafo completo il cui insieme di vertici sia I . Coloriamo lo spigolo $((a, b), (c, d))$ blu se vale la prima condizione e rosso se vale la seconda. Ma allora, per il teorema 1, c'è o una clique blu C con $\alpha(G) + 1$ vertici oppure una clique rossa con $\alpha(H) + 1$ vertici. Nel primo caso, $(a, b) \in C$ e $(c, d) \in C$ implicano che vale la prima condizione e quindi $\{a : a \in V(G) \wedge (a, b) \in C \text{ per qualche } b\}$ è un insieme stabile di G con $\alpha(G) + 1$ vertici. Questa è una contraddizione. Nel secondo caso, $\{b : b \in V(H) \wedge (a, b) \in D \text{ per qualche } a\}$ è un insieme stabile di H con $\alpha(H) + 1$ vertici. Anche questa è una contraddizione. Se ne conclude che $\alpha(G \cdot H) \leq N - 1$.

Utilizzando stringhe di lunghezza k , si ottengono insiemi stabili nel grafo $G^k = G \cdot G \cdot G \dots \cdot G$ e quindi alfabeti non ambigui sempre più grandi, ma a costo dell'efficienza: le stringhe sono più lunghe. Per questo motivo Shannon nel 1956 introdusse la seguente definizione di capacità di un grafo: $c(G) = \sup_k \sqrt[k]{\alpha(G^k)}$.